

## 2. MODELO ELÉCTRICO DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

### 1 ANÁLISIS DE REDES MALLADAS

#### 1.1 Método de análisis

Los sistemas de potencia constituyen, en la inmensa mayoría de los casos, redes mallas, donde el camino entre dos puntos distintos no es nunca único. En Teoría de circuitos se analizan bien por el método de las mallas, donde las variables independientes son las corrientes de bucle, o bien por el método de los nudos, donde lo son las tensiones de nudo.

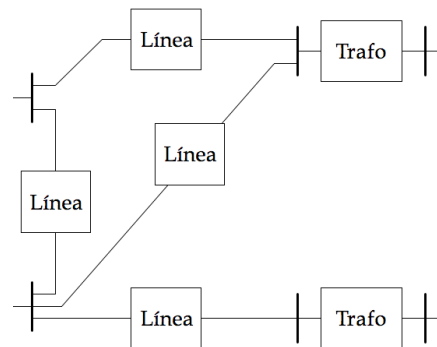


Fig. 28 Red mallasada

En un sistema eléctrico que garantiza la estabilidad de la tensión en los puntos de suministro dentro de unos límites muy estrechos, el método de análisis preferido es el de los nudos, que proporciona inmediatamente esos valores de tensión en cada nudo de la red.

La obtención del modelo requiere dar, por orden, los pasos del recuadro de la derecha.

En esta lección se explican los fundamentos del método que se va a seguir para obtener un modelo matemático de una red genérica, a partir del cual obtener las tensiones de todos los nudos de la red y, con ellas, las intensidades de las fuentes y el flujo de potencia por las líneas.

#### PASOS A SEGUIR

1. Transformación de la red real a una representación eléctrica equivalente que cumpla los requisitos de aplicación del método de los nudos. Se utilizarán admitancias, y fuentes de intensidad (más una fuente de tensión).
2. Obtención de la matriz de admitancias de ese modelo de la red a partir de sus elementos individuales, mediante las herramientas del análisis de redes de dos puertos.
3. Solución de la ecuación matricial mediante algún método iterativo.
4. Obtención de todas las intensidades y potencias, especialmente los flujos de potencia por la red.
5. Comparación de los resultados con las restricciones impuestas al modelo para obtener las conclusiones del estudio efectuado.

## 1.2 Fuentes de intensidad con un terminal común referencia de potenciales

La Teoría de Circuitos muestra que siempre es posible transformar cualquier red de impedancias con fuentes de tensión en otra equivalente con admitancias y fuentes de intensidad para poder analizarla por el método de los nudos.

Sin embargo, es habitual en los modelos de sistemas que todas esas fuentes de intensidad tengan un terminal común, y que éste sea, además, el que se tome de referencia de potenciales. Para adecuar los modelos a este requisito puede ser necesario efectuar las siguientes transformaciones:

- Si la red tiene una fuente de tensión conectada entre dos nudos, ninguno de los cuales es el de referencia <sup>(3)</sup>, se transforma en fuente de intensidad.
- Cuando todas las fuentes sean de intensidad, se actúa como indica la figura 9. Allí la fuente de intensidad  $i_3$  ya cumple la condición pedida, pero no ocurre así con la fuente de intensidad  $i_{12}$ . Como esta fuente inyecta la intensidad  $i$  en el nudo 1 y  $-i$  en el nudo 2, puede ser sustituida por las dos fuentes de intensidad de la figura 9 b), que sí cumplen las condiciones requeridas y son equivalentes a la fuente eliminada.
- Las nuevas fuentes no inyectan ninguna intensidad en el nudo común denotado por el símbolo de tierra porque  $i_1 + i_2 = i_1 + (-i_1) = 0$ , con lo cual la red b) es equivalente a la red a).
- Si entre la referencia de potenciales y un nudo  $k$  se conectan varias fuentes de intensidad, todas ellas equivalen a una sola fuente de intensidad de valor la suma de las intensidades de las fuentes que confluyen en el nudo  $k$ .

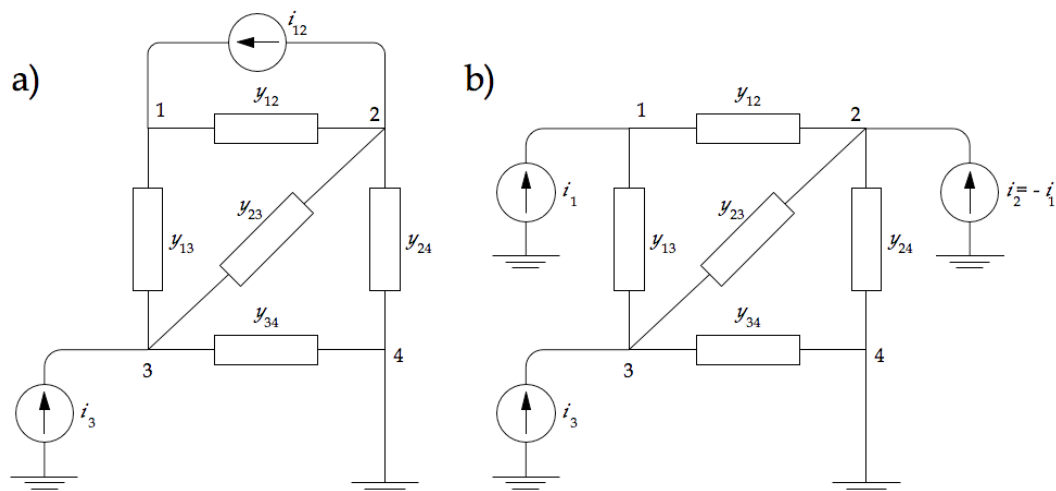


Fig. 29 Transformación de fuentes para que uno de sus terminales sea el nudo de referencia de potenciales.

En consecuencia, siempre es posible conseguir una red equivalente a una dada cuyas fuentes estén en paralelo con ramas de impedancias, que sean solo fuentes de intensidad, y que

<sup>3</sup> El caso en que una fuente de tensión se conecte entre un nudo y el de referencia se considera más adelante.

tengan un terminal común coincidente con el nudo de referencia.

Este es el modelo que se prefiere para analizar los sistemas eléctricos de potencia. Y al involucrar mayoritariamente fuentes de intensidad y admitancias, se utiliza con ventaja el método de los nudos sobre el de las mallas.

### 1.3 Fuente de tensión

Aunque el modelo anterior está basado únicamente en fuentes de intensidad, se introduce siempre una fuente de tensión en el nudo 1, también con un terminal común al del resto de las fuentes. Por tanto, el potencial del nudo 1 es el valor de esa fuente de tensión.

Esta fuente de tensión entre el nudo 1 y el nudo que es referencia de potenciales elimina el potencial del nudo 1 como incógnita, pero introduce como incógnita la intensidad de esa fuente de tensión.

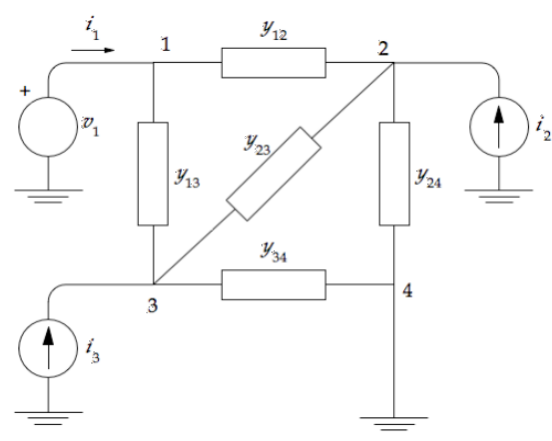


Fig. 30 Red de admittancias y fuentes de intensidad salvo una de tensión, todas con un terminal común.

### 1.4 Modelo y solución de la red

En la figura 10 se ha mostrado un modelo muy simplificado pero típico para el análisis de sistemas eléctricos de potencia. Se trata de:

- Una red de admittancias (se indican las admittancias de las ramas  $y$ ).
- Todas las fuentes tienen un terminal común, que está denotado por el símbolo de tierra, y que es el terminal de referencia.
- Predominan las fuentes de intensidad, salvo la fuente de tensión del nudo 1.

La ecuación que proporciona las soluciones de la red de la figura 10, obtenida por el método de los nudos, es <sup>(4)</sup>

$$\begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} + y_{24} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{13} + y_{23} + y_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

<sup>4</sup> La obtención de la ecuación matricial de la red se recuerda más adelante en la sección 2.4, p. 84.



En esa ecuación  $v_1$  es conocida, pues es la tensión de la fuente de tensión del modelo, pero no lo es  $i_1$  que es la intensidad hacia el nudo 1 de esa fuente de tensión. Tampoco se conocen las tensiones  $v_2$  ni  $v_3$ . Y pueden conocerse o no las intensidades  $i_2$  e  $i_3$ , aunque lo habitual será saber su potencia. Los valores desconocidos se obtendrán al resolver la ecuación de la red, que al ser una red de Kirchhoff proporciona un sistema compatible y determinado con solución única.

## 2 REDES DE SECUENCIA Y ESQUEMA UNIFILAR

El modelo de red mallada descrito en la sección 1.4 es monofásico, mientras que los sistemas eléctricos de potencia son habitualmente trifásicos.

En condiciones de tensiones e intensidades perfectamente equilibradas, los sistemas trifásicos pueden analizarse mediante un modelo monofásico, pues las tensiones e intensidades calculadas serían las simples, válidas para cualquier fase, y las relaciones con las tensiones compuestas son las tradicionales  $U = V\sqrt{3}$ .

Sin embargo, el equilibrio perfecto es una condición particular que pocas veces se alcanza en los sistemas de potencia, y no es una hipótesis adecuada de cálculo en condiciones extraordinarias de la red, como en el caso de cortocircuitos. Por ello se puede adoptar un método más general, basado en las componentes simétricas.

### 2.1 Componentes simétricas

El método de análisis de sistemas trifásicos, equilibrados o no, basado en las componentes simétricas, permite sustituir el sistema de tensiones o intensidades original por la suma de tres sistemas de tensiones o intensidades equilibradas denominados:

- Sistema directo o de secuencia positiva (subíndice  $d$  ó 1)
- Sistema inverso o de secuencia negativa (subíndice  $i$  ó 2)
- Sistema homopolar o de secuencia cero (subíndice  $h$  ó 0).

Su fundamento se encuentra en el teorema de FORTESCUE o STOKVIS <sup>(5)</sup> según el cual todo sistema trifásico de tensiones  $V_1, V_2$  y  $V_3$  equivale a la suma de los tres sistemas equilibrados directo ( $V_{1d}, V_{2d}, V_{3d}$ ), inverso ( $V_{1i}, V_{2i}, V_{3i}$ ) y homopolar ( $V_{1h}, V_{2h}, V_{3h}$ ):

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1d} + V_{1i} + V_{1h} \\ V_2 &= V_{2d} + V_{2i} + V_{2h} \\ V_3 &= V_{3d} + V_{3i} + V_{3h} \end{aligned}$$

Y si se tratara de intensidades se tendría lo mismo, sustituyendo  $V$  por  $I$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1d} + I_{1i} + I_{1h} \\ I_2 &= I_{2d} + I_{2i} + I_{2h} \\ I_3 &= I_{3d} + I_{3i} + I_{3h} \end{aligned}$$

<sup>5</sup> QUINTELA, F. R. y REDONDO R.C., *Redes eléctricas de Kirchhoff*, 3ª ed, 2016, pág. 531.

## 2.2 Impedancias para los distintos sistemas

Las impedancias de las ramas de la red pueden tener el mismo valor para cualquiera de los tres sistemas directo, inverso y homopolar, llamándose entonces impedancias *indiferentes*. Así ocurre en cargas puramente resistivas, o en capacitancias o en inductancias sin acoplamiento magnético. Pero son distintas en generadores, transformadores, motores, líneas de transporte y distribución, y bobinas acopladas magnéticamente.

También pueden ser iguales para cada fase, constituyendo un sistema *equilibrado* de impedancias, aunque puede ocurrir que no lo sean.

Una descripción adecuada de los sistemas eléctricos de potencia, en condiciones de funcionamiento normal, suele incluir impedancias que son *no indiferentes*, porque no coinciden sus valores para los tres sistemas directo, inverso y homopolar, pero que son *equilibradas*, porque son iguales para las tres fases.

Cuando son *equilibradas*, los resultados que se obtienen para los tres sistemas de cada fase son idénticos a los que se obtendrían para los sistemas de las otras dos. Por ello se omiten estos últimos, y solo se consideran los tres sistemas de una fase cualquiera, que coinciden en todo con los de las otras dos. Pero al ser las impedancias *no indiferentes*, generalmente hará falta representar los tres sistemas de la fase estudiada: directo, inverso y homopolar.

## 2.3 Redes de secuencia

Teniendo en cuenta los límites vistos en la sección anterior, un circuito trifásico de impedancias equilibradas puede analizarse por medio de tres circuitos monofásicos que incluyan las impedancias del sistema directo, del inverso y del homopolar, respectivamente.

A estos circuitos se les llama, respectivamente también, *red de secuencia directa equivalente*, *red de secuencia inversa equivalente*, y *red de secuencia homopolar equivalente*. En general constituyen las redes de secuencia equivalentes a un circuito dado, o más sencillamente, redes de secuencia.

Las redes de secuencia son monofásicas. Se obtienen a partir del circuito original trifásico tomando un punto de referencia de potenciales, y procurando que las fuentes tengan un terminal directamente conectado a ese punto de referencia, que era una de las condiciones de los modelos de sistemas de potencia (véase la sección 1.4):

- En general ese punto suele coincidir con el punto neutro del sistema trifásico, y éste puede existir realmente, si hay elementos trifásicos de impedancias equilibradas conectadas en estrella, o ser virtual, como en el caso de tripolos en triángulo.
- En el caso de sistemas eléctricos con neutro puesto a tierra, ese punto de referencia es también tierra.

Una vez resueltas las redes de secuencia equivalentes, las tensiones e intensidades del circuito trifásico se obtienen a partir de ellas mediante la expresión del teorema de FORTESCUE / STOKVIS anterior.

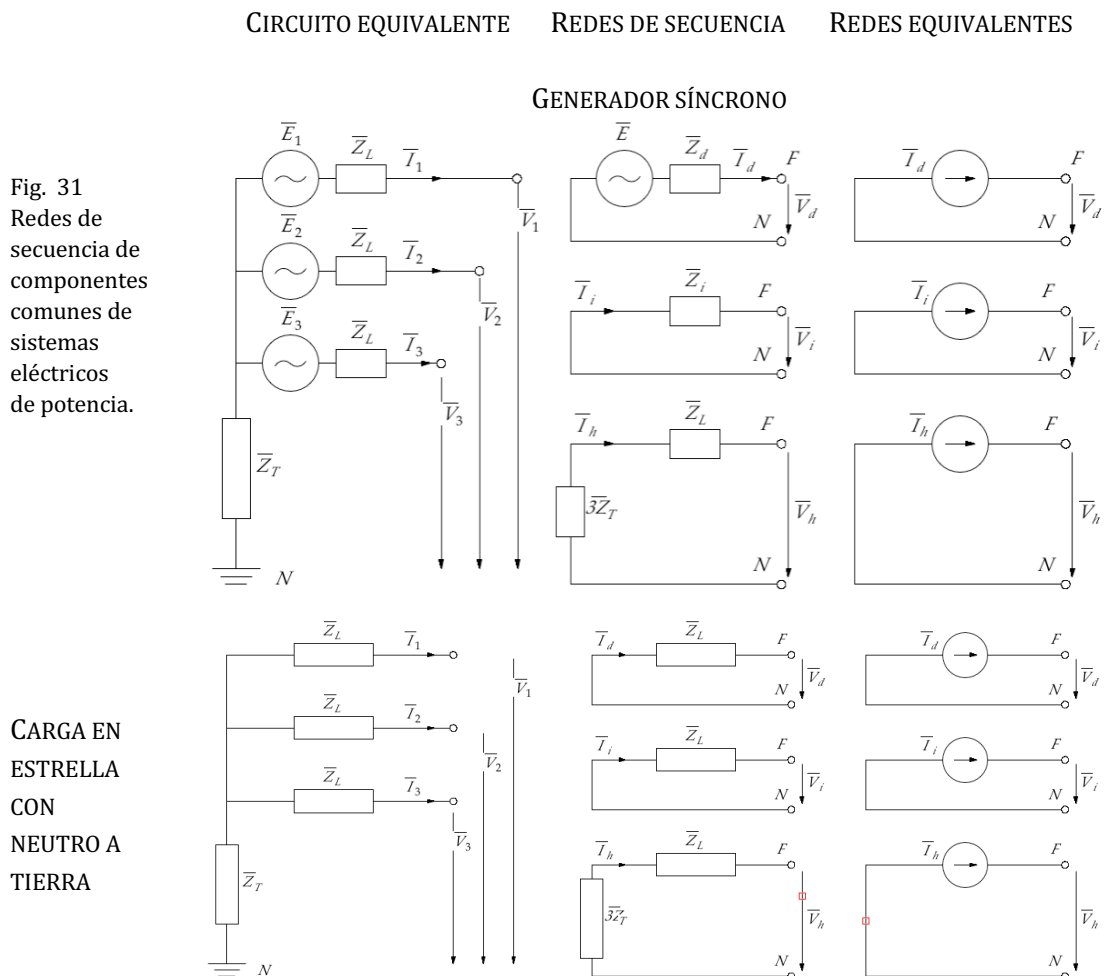
Por último, es posible considerar en el análisis las tensiones compuestas (entre fase y fase) en lugar de las tensiones simples (entre el punto de referencia y cada fase), pues si se mantiene el sistema trifásico de tensiones equilibradas, la relación entre unas y otras es simplemente raíz de tres  $\sqrt{3}$ . Esto se encuentra en la bibliografía de esta manera: simplificaciones

de sistemas eléctricos basadas en redes de secuencia pero con fuentes de tensión cuyo valor no es la tensión simple del sistema sino la compuesta.

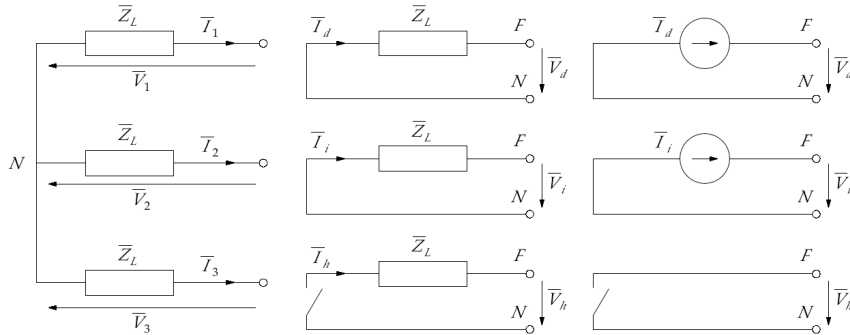
A continuación se ofrece un resumen de dichas redes de secuencia basadas en fuentes de tensión *independientes* para los circuitos simples habituales en el análisis de sistemas de potencia. El punto de referencia de potenciales se indica como  $N$  o como  $T$ ; el punto al potencial de fase es  $F$ .

Importante:

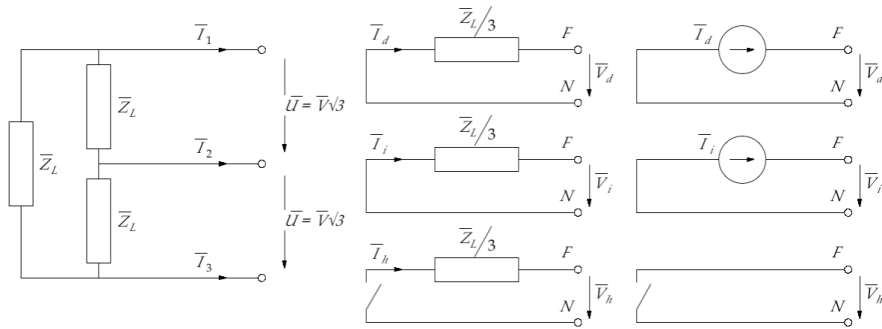
Las redes situadas a la derecha son las que utilizaremos en nuestros modelos más adelante: no se trata del equivalente de NORTON de las redes situadas en el centro, sino una sustitución de las fuentes de tensión *independientes* por fuentes de intensidad *dependientes* del resto de la red, ya que, como veremos, será el resto de la red el que les fije la tensión.



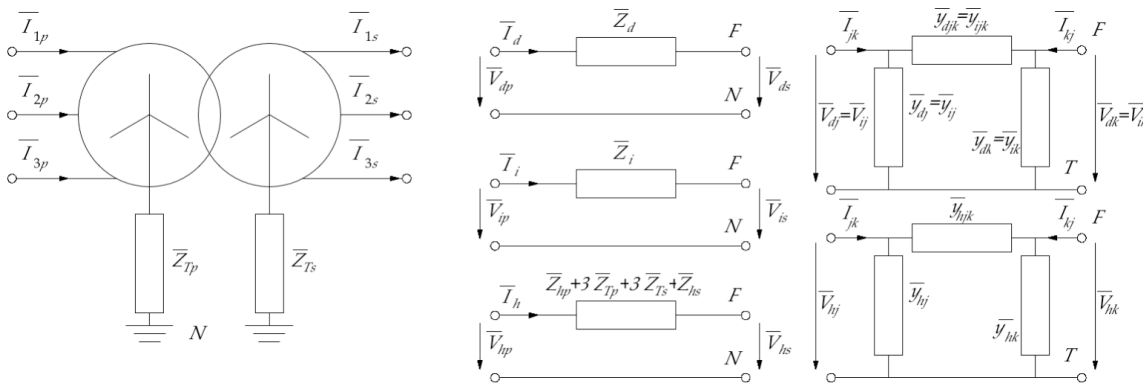
CARGA EN ESTRELLA CON NEUTRO AISLADO



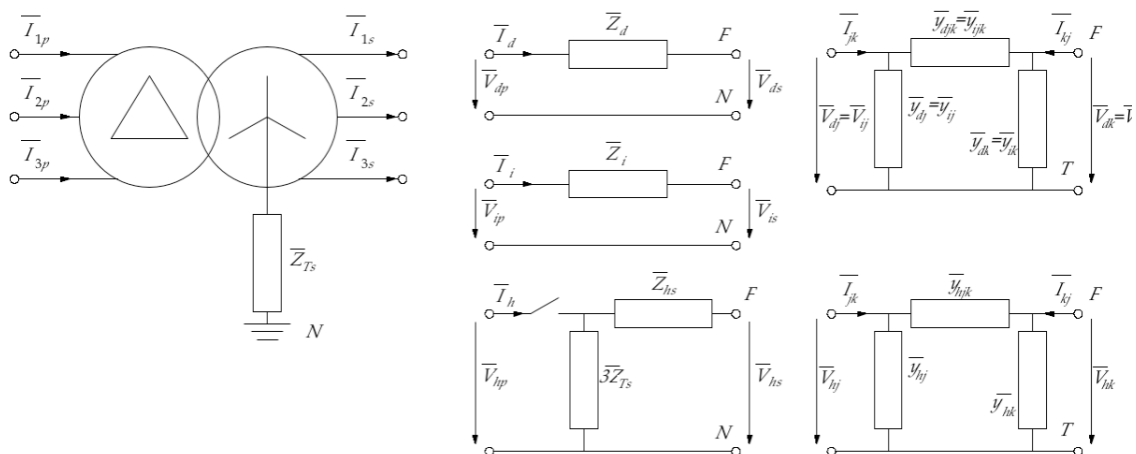
CARGA EN TRIÁNGULO



TRANSFORMADOR Y-Y (SIN DESFASE ENTRE DEVANADOS)

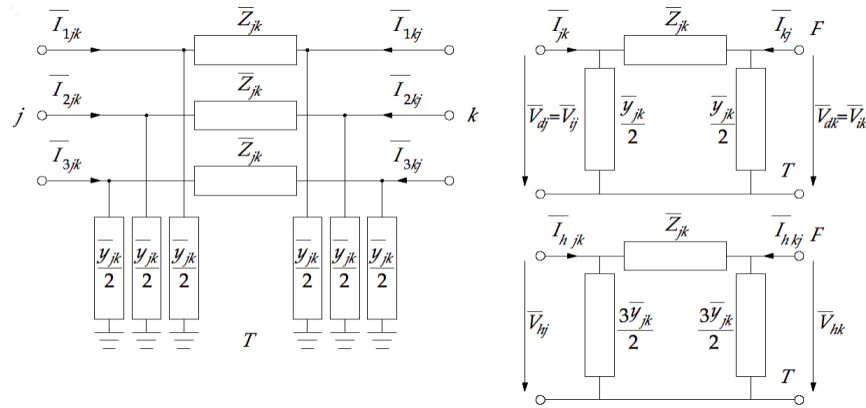


TRANSFORMADOR Δ-Y (SIN DESFASE ENTRE DEVANADOS)

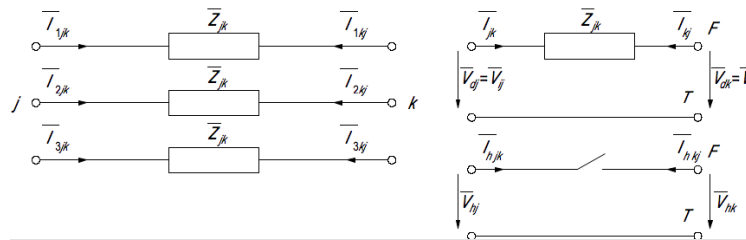




LÍNEA  
LARGA



LÍNEA  
CORTA



## 2.4 Diagrama de redes equivalentes

Cuando las redes funcionan sometidas a un sistema de tensiones equilibradas, las componentes inversas y homopolares de dichas tensiones valen cero, y cuando las impedancias de las redes son también equilibradas, las componentes inversas y homopolares de las intensidades resultantes también valen cero. Como estas condiciones son las habituales en el funcionamiento estacionario de los grandes sistemas de potencia, lo habitual es estudiarlos a partir de las componentes directas únicamente, que son las representadas en las redes de secuencia directa.

En nuestro modelo, sin embargo, sustuiremos casi todas las fuentes independientes por fuentes dependientes del resto de la red. El modelo será como el ejemplo de la Fig. 32.

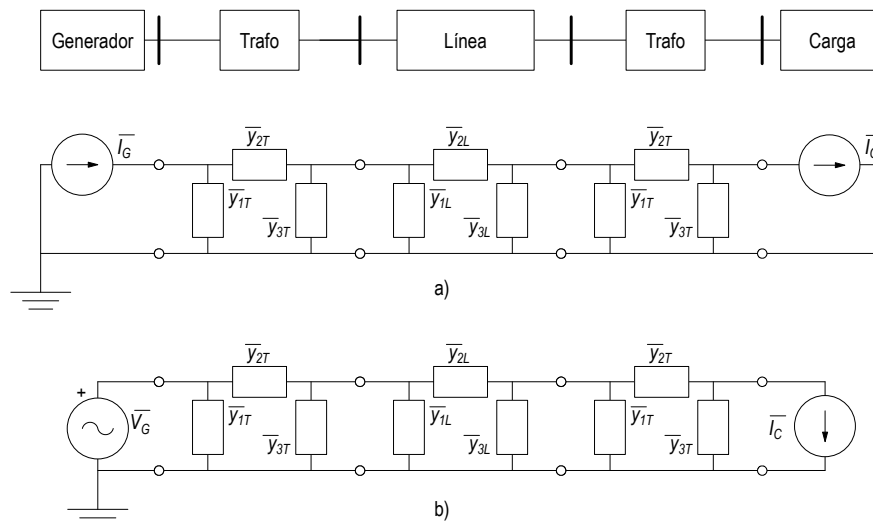


Fig. 32 Ejemplo de representación de un sistema sencillo utilizando las redes de secuencia directa equivalentes de cada elemento.

En cambio, para el análisis de sistemas frente a desequilibrios entre las impedancias de fase (estudio de ciertos cortocircuitos o de los fallos a tierra), o cuando las tensiones se desequilibran (pérdida de una o dos fases por avería), se acude además a las redes de secuencia inversa y de secuencia homopolar, y las tensiones de las fuentes son las tensiones simples del sistema a estudiar.

En todos los casos el modelo se analiza mediante el método de los nudos, aplicado a la red equivalente de fuentes con un terminal común como ya se ha explicado.

## 2.5 Esquema unifilar

Al pasar de la representación de los elementos de un sistema eléctrico por medio de sus circuitos equivalentes, a la representación mediante sus redes de secuencia, la simplificación es notable. Sin embargo, cuando el sistema se complica, este método de representación deja de ser tan conveniente.

Por ejemplo, el mismo caso anterior, ampliado en una línea, un transformador y una carga más, resulta ya complejo de visualizar:

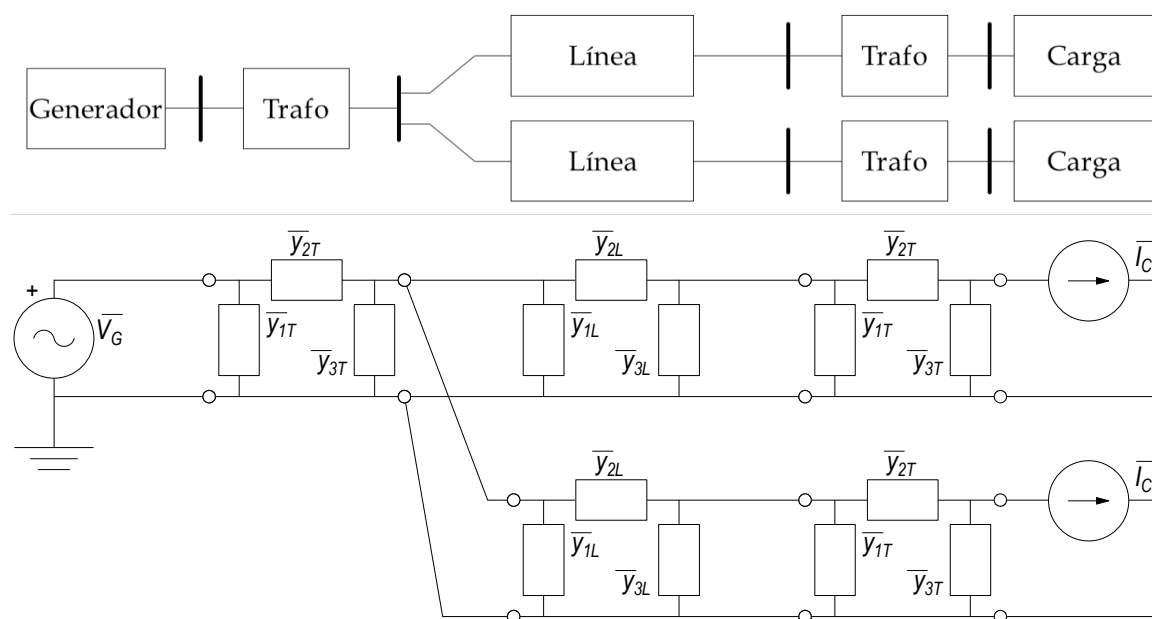


Fig. 33 Representación del sistema anterior ampliado, utilizando también las redes de secuencia directa.

Por ello se prefiere la representación unifilar, que es similar al diagrama de bloques de la figura anterior, pero sustituyendo los nombres de los elementos por sus símbolos adecuados. Así, el diagrama de bloques de la figura siguiente, se transforma en un diagrama unifilar muy fácil de interpretar.

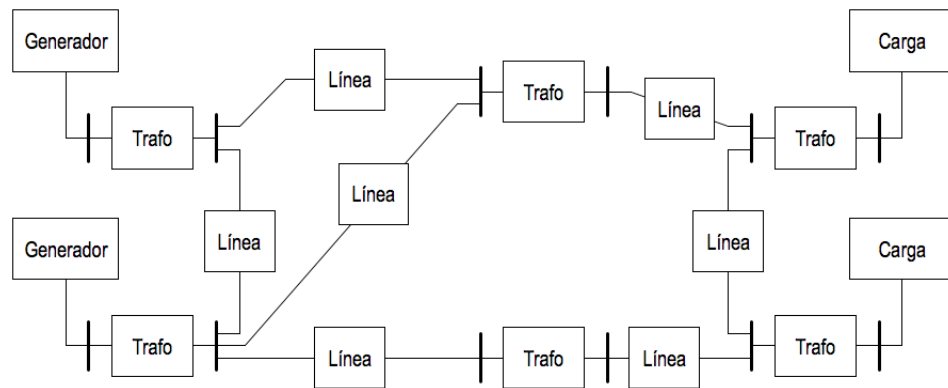


Fig. 34 Diagrama de bloques de un sencillo sistema de potencia

Para el cálculo de tensiones e intensidades es preciso, sin embargo, considerar las impedancias y fuentes de las redes de secuencia, que se pueden anotar en el diagrama unifilar o indicar aparte.

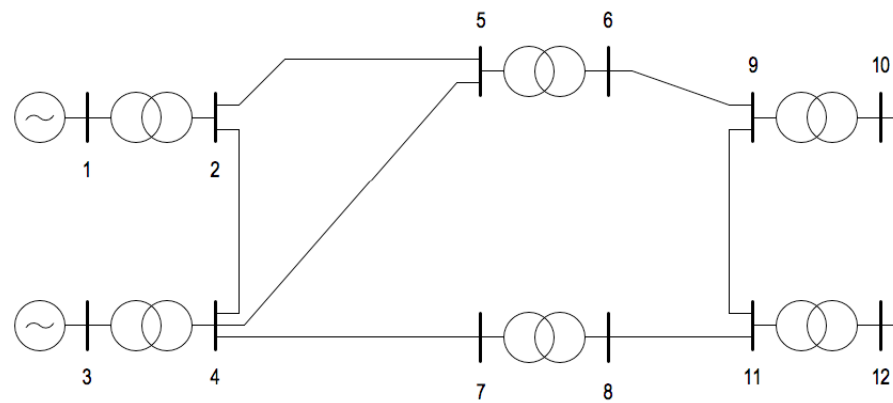


Fig. 35 Esquema unifilar correspondiente.

### 3 REDES DE DOS PUERTAS Y PARÁMETROS DE TRANSMISIÓN

#### 3.1 Redes de dos puertas

Las redes de dos puertas, de dos terminales por puerta, son una herramienta muy útil a la hora de pasar del modelo eléctrico de una red, establecido a partir de las redes de secuencia anteriores, al modelo de cálculo del método de los nudos.

La Teoría de Circuitos define *puerta* como cada conjunto de terminales de un multipolo cuya suma de intensidades es idénticamente nula <sup>(6)</sup>. El objeto de la Fig. 36 que consta de cuatro terminales, es una puerta porque cumple esa condición.

<sup>6</sup> Esta sección está extraída del capítulo 13 del libro F. R. QUINTELA Y R.C. REDONDO, *Redes eléctricas de Kirchoff*, 3ª ed, Béjar 2016. Conviene que el alumno lo repase antes de continuar la lectura de estas páginas.

Pero como los dos terminales de la izquierda también la cumplen, ellos dos son igualmente una puerta. Lógicamente, si los dos terminales de la izquierda (lado 1) son una puerta, necesariamente los dos de la derecha (lado 2) también lo son. Por ello se habla, en casos de cuadripolos como el de la figura, de *red de dos puertas*.

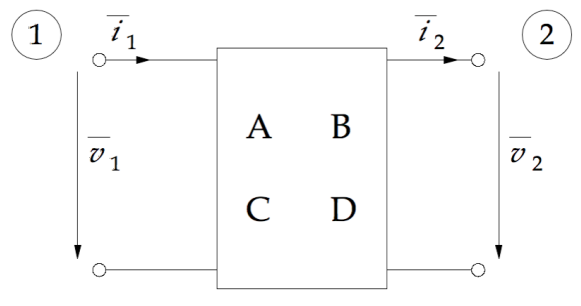


Fig. 36 Red de dos puertas, con dos terminales por puerta, habitual en la representación de componentes de sistemas eléctricos de potencia.

Muchos aparatos e instalaciones eléctricas se describen como redes de dos puertas, aunque en cada una de ellas pueden tener cualquier número de terminales. Así, por ejemplo, un transformador trifásico  $\Delta$ -Y con neutro accesible es una red de dos puertas con tres terminales en el lado  $\Delta$  y cuatro terminales en el lado Y. O una línea trifásica de tres hilos es una red de dos puertas con tres terminales a cada lado.

Generalmente los terminales situados a la izquierda constituyen la puerta de *entrada*, y los situados a la derecha la puerta de *salida*. Las tensiones e intensidades a la entrada y a la salida se llaman variables de la red de dos puertas. Cada uno de los conjuntos de valores  $\{v_1, v_2, i_1, i_2\}$  se llama solución de la red de dos puertas.

### 3.2 Parámetros de transmisión y matriz de admitancias

Para expresar la relación entre las tensiones y las intensidades  $\{v_1, v_2, i_1, i_2\}$  de una red de dos puertas se utilizan los llamados parámetros de transmisión. Fijando como positivos los sentidos de las tensiones e intensidades de la fig. 16 existen unos parámetros  $\{A, B, C, D\}$  tales que

$$\begin{cases} v_1 = A v_2 + B i_2 \\ i_1 = C v_2 + D i_2 \end{cases}, \text{ o bien } \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Se llama *matriz de parámetros de transmisión directa* a la matriz

$$a = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Las matrices de transmisión directa son inmensamente útiles, pues permiten obtener fácilmente la matriz equivalente de una rama de la red formada por una cascada de elementos cualquiera, como se verá en el apartado siguiente.

Si la red se describe por medio de las ecuaciones que son propias del método de los nudos, según el criterio de que la suma de las intensidades que salen de cada nudo es cero, se puede poner también que



$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2 \\ -i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 \end{cases}; \text{ o bien } \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Así se obtiene otra matriz de parámetros cuyo nombre es *matriz de admitancias* de la red de dos puertas, en siemens (S), inverso de los ohmios ( $\Omega^{-1}$ ):

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} (\Omega^{-1})$$

Los términos de la matriz de admitancias de cada rama formarán parte de la matriz de admitancias de toda la red, y será muy sencillo ir formándola a partir de las matrices de admitancias de cada rama por separado. Esto se hará en la lección siguiente.

Puesto que las matrices de transmisión se emplearán como herramienta de cálculo, pero son los términos de la matriz de admitancias los que realmente se necesitan para crear la matriz de admitancias de toda la red, es útil poder transformar con rapidez los términos de las matrices de transmisión en los términos de las matrices de admitancias.

Pues bien, la equivalencia entre los coeficientes de ambas matrices es simplemente esta:

$$\begin{cases} Y_{11} = \frac{D}{B} & Y_{12} = \frac{-\Delta_a}{B} \\ Y_{21} = \frac{-1}{B} & Y_{22} = \frac{A}{B} \end{cases} \quad (3)$$

La comprobación es sencilla. Si se supone que  $v_2 = 0$ , de (1) y (2) se obtiene que

$$\begin{cases} v_1 = B i_2 \\ i_1 = D i_2 \\ i_1 = Y_{11} v_1 \\ -i_2 = Y_{21} v_1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{i_2}{v_1} = \frac{1}{B}; & Y_{21} = \frac{-i_2}{v_1} = \frac{-1}{B} \\ D i_2 = Y_{11} v_1; & Y_{11} = D \frac{i_2}{v_1} = \frac{D}{B} \end{cases}$$

y si ahora se hace  $v_1 = 0$ , de (1) y (2) se deduce que

$$\begin{cases} 0 = A v_2 + B i_2 \\ i_1 = C v_2 + D i_2 \\ i_1 = Y_{12} v_2 \\ -i_2 = Y_{22} v_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} -B i_2 = A v_2; & \frac{-i_2}{v_2} = \frac{A}{B} \\ Y_{22} = \frac{-i_2}{v_2} = \frac{A}{B} \end{cases}$$

$$Y_{12} = \frac{i_1}{v_2}; \quad \frac{i_1}{v_2} = C + D \frac{i_2}{v_2} = C + D \frac{-A}{B} = \frac{BC - AD}{B}; \quad Y_{12} = \frac{-\Delta_a}{B}$$

Se deja como ejercicio comprobar que la transformación inversa es

$$\begin{cases} A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & B = \frac{-1}{Y_{21}} \\ C = \frac{-\Delta_y}{Y_{21}} & D = \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{cases} \quad (4)$$

### 3.3 Líneas como redes de dos puertas

Este es un primer ejemplo de aplicación de la técnica de las redes de dos puertas, de dos terminales por puerta. Se trata de obtener las matrices de transmisión y de admitancias de la red de secuencia directa de una línea 'corta'.

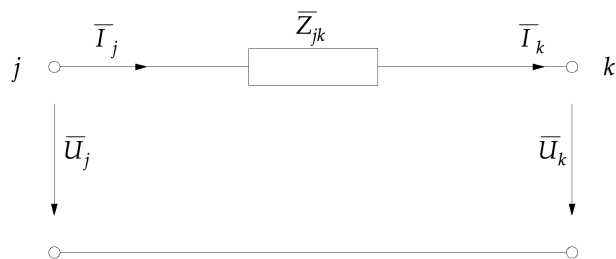


Fig. 37 Línea corta como red de dos puertas.

Los parámetros de la matriz de transmisión se obtienen por simple inspección del circuito, aplicando la definición (eq.1)

$$\begin{cases} v_1 = A v_2 + B i_2 \\ i_1 = C v_2 + D i_2 \end{cases}$$

que con la notación adoptada en este ejemplo resulta simplemente como a la derecha:

$$\begin{cases} \bar{U}_j = \bar{U}_k + \bar{Z}_{jk} \bar{I}_k \\ \bar{I}_j = \bar{I}_k \end{cases};$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z}_{jk} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

Para obtener los parámetros de la matriz de admitancias, la definición a aplicar es (eq.2)

$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2 \\ -i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{I}_j = \frac{\bar{U}_j - \bar{U}_k}{\bar{Z}_{jk}} = \frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \bar{U}_j - \frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \bar{U}_k \\ -\bar{I}_k = \frac{\bar{U}_k - \bar{U}_j}{\bar{Z}_{jk}} = -\frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \bar{U}_j + \frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \bar{U}_k \end{cases};$$

que, de nuevo con la notación de este ejemplo, queda como se ve a la derecha:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_j \\ -\bar{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}_{jk}} & -\frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_{jk}} & \frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{U}_k \end{bmatrix}$$

Este último resultado era esperable, ya que coincide con el que puede obtenerse directamente mediante el algoritmo ya estudiado en Teoría de Circuitos para el método de los nudos: en la diagonal principal aparecen las admitancias propias de cada nudo, y fuera de ella las admitancias que los conectan cambiadas de signo, todas en  $\Omega^{-1}$ .

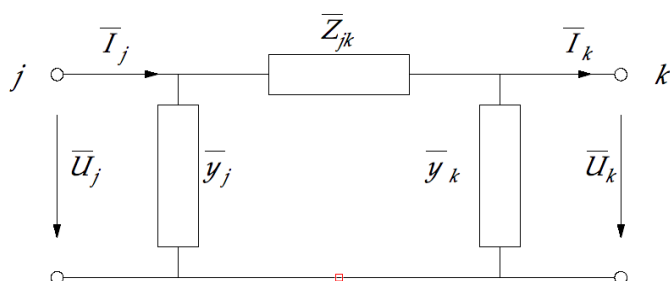


Fig. 38 Línea larga como red de dos puertas.

Para el modelo de línea larga la matriz de transmisión es algo más laboriosa de obtener, pero gracias a herramientas como el programa Mathematica™, es posible llegar a la solución sin esfuerzo:

```
Simplify[
Solve[{-ij + yj uj + (uj - uk)/z == 0, (uk - uj)/z + yk uk + ik == 0},
{uj, ij}]
]
{{uj -> uk + ik z + uk yk z,
ij -> ik + ik yj z + uk (yj + yk + yj yk z)}}
```

Es decir, la definición de los parámetros de la matriz de transmisión (eq.1) se transforma, con la notación aquí adoptada, en lo que se muestra a la derecha:

$$\begin{cases} \bar{U}_j = (1 + \bar{y}_k \bar{Z}_{jk}) \bar{U}_k + \bar{Z}_{jk} \bar{I}_k \\ \bar{I}_j = (\bar{y}_j + \bar{y}_k + \bar{y}_j \bar{y}_k \bar{Z}_{jk}) \bar{U}_k + (1 + \bar{y}_j \bar{Z}_{jk}) \bar{I}_k \end{cases};$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \bar{y}_k \bar{Z}_{jk} & \bar{Z}_{jk} \\ \bar{y}_j + \bar{y}_k + \bar{y}_j \bar{y}_k \bar{Z}_{jk} & 1 + \bar{y}_j \bar{Z}_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

Es frecuente considerar que el valor de las admitancias en paralelo de una línea larga es igual, cumpliéndose que

$$\bar{y}_j = \bar{y}_k = \frac{\bar{y}}{2}$$

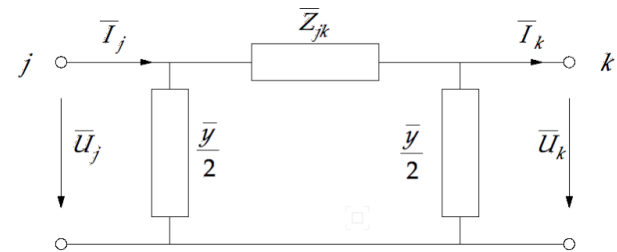


Fig. 39 Línea con semi-admitancias iguales.

como en la Fig. 39. Entonces resulta que

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\bar{y}}{2} \bar{Z}_{jk} & \bar{Z}_{jk} \\ \bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{4} \bar{Z}_{jk} & 1 + \frac{\bar{y}}{2} \bar{Z}_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

Y la matriz de admitancias general puede obtenerse por simple aplicación del algoritmo del método de los nudos, aunque es un buen ejercicio llegar a ella aplicando la definición (eq.2):

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_j \\ -\bar{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_j + \frac{1}{\bar{Z}_{jk}} & -\frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_{jk}} & \bar{y}_k + \frac{1}{\bar{Z}_{jk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{U}_k \end{bmatrix}$$

El cálculo exacto de la relación entre tensiones e intensidades, esto es, el cálculo exacto de los parámetros de transmisión de una línea, requiere un análisis diferencial que puede hallarse en los libros dedicados a líneas de corriente alterna. Es útil sobre todo a partir de 250 km de longitud de línea, pues hasta ese umbral los resultados que se obtienen utilizando el modelo de línea larga con impedancias colocadas en  $\pi$  son similares.

Según el modelo exacto, y para los sentidos de tensiones e intensidades ya habituales en esta sección, se tiene que en una línea de  $l$  kilómetros de longitud

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\bar{\gamma} l) & \bar{Z}_c \sinh(\bar{\gamma} l) \\ \frac{1}{\bar{Z}_c} \sinh(\bar{\gamma} l) & \cosh(\bar{\gamma} l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{Z}_c = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{jk}}{\bar{y}_{jk}}}$$

es la impedancia característica de la línea;

$$\bar{Z}_{jk} = \bar{z} l_{jk} = (R + j\omega L) l_{jk}$$

es la impedancia en serie, siendo  $R$  la resistencia de la línea en  $\Omega/\text{km}$  y  $L$  su inductancia en  $\text{H}/\text{km}$ ;

$$\bar{y}_{jk} = \bar{y} l_{jk} = (G + j\omega C) l_{jk}$$

es la admitancia en paralelo, donde  $G$  es la conductancia en  $\Omega^{-1}/\text{km}$  y  $C$  es la capacidad en  $\text{F}/\text{km}$ ;

$$\omega = 2\pi f$$

es la pulsación de la red, de frecuencia  $f$ , en Hz;

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{z} \bar{y}}$$

es la constante de propagación de la línea.

### 3.4 Condensadores en serie y reactancias en paralelo

Para modificar el desfase entre la tensión y la intensidad al final de una línea eléctrica, a menudo larga, se colocan condensadores en serie o reactancias en paralelo. De esta manera se consigue disminuir la intensidad requerida para transportar una misma potencia, lo que redundará en menos pérdidas en las líneas y en los generadores de las centrales, además de otros beneficios.

Los modelos de red de dos puertas de ambas posibilidades son los siguientes:

En el caso de los condensadores (Fig. 40) el circuito es similar al del modelo de línea corta (Fig. 37) por lo que los parámetros de transmisión son

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & jX_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

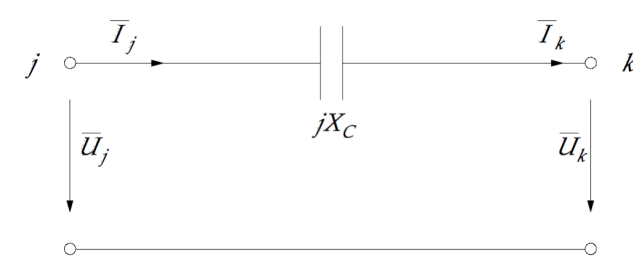


Fig. 40 Condensador en serie.

Los parámetros de transmisión de la red de dos puertas correspondiente a una reactancia en paralelo (fig. 22) se pueden obtener también por simple inspección del circuito. Ahora las tensiones de las dos puertas son iguales, y las intensidades están relacionadas a través de la susceptancia de la bobina  $B_L$  de esta forma:

$$\begin{cases} \bar{U}_j = \bar{U}_k \\ \bar{I}_j = \frac{\bar{U}_k}{jB_L} + \bar{I}_k \end{cases};$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{jB_L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

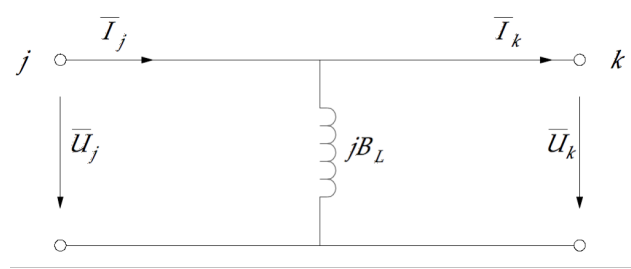


Fig. 41 Reactancia en paralelo.

### 3.5 Conexiones de dos redes de dos puertas entre sí

A menudo resulta complicado obtener la matriz de admitancias de una rama del modelo de una red real, porque pueden aparecer varios nudos en ella. El algoritmo de obtención rápida del método de los nudos nos daría tantas ecuaciones como nudos menos el de referencia, lo que conduce a escribir matrices de dimensión superior a 2x2, que es la matriz de admitancias de la red de dos puertas y dos terminales por puerta buscada. Se requieren, por tanto, otros métodos distintos del de simple inspección, y uno se muestra aquí.

Dos redes de dos puertas pueden conectarse entre sí de cuatro maneras diferentes: en serie, en paralelo, en serie-paralelo y en cascada (7).

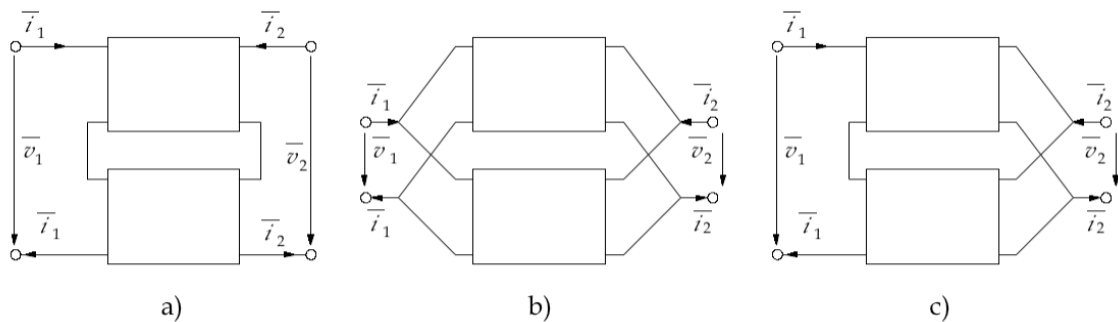


Fig. 42 Dos redes de dos puertas en a) serie, en b) paralelo y en c) serie-paralelo.

Los cuadripolos de las redes de secuencia directa, inversa y homopolar vistas en el apartado 2.3 de este tema, pp. 54 ss., son redes de dos puertas.

En sistemas eléctricos de potencia es habitual, por tanto, trabajar con modelos de circuitos cuyas ramas pueden considerarse asociaciones de dos o más redes de dos puertas en cascada (Fig. 43). Se demuestra que si uno de dos componentes conectados en cascada funciona como red de dos puertas, el otro también. En esas condiciones el cuadripolo resultante también es una red de dos puertas.

En cuanto a las matrices de parámetros de transmisión directa, la matriz de parámetros de la red resultante es el producto de las matrices de transmisión directa de las redes conectadas en cascada:

<sup>7</sup> Véase el capítulo final Redes de dos puertas del libro F. R. QUINTELA, *Análisis de redes resistivas, Monografías de electricidad*, Béjar 1996, pp. 207 ss.

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_3 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

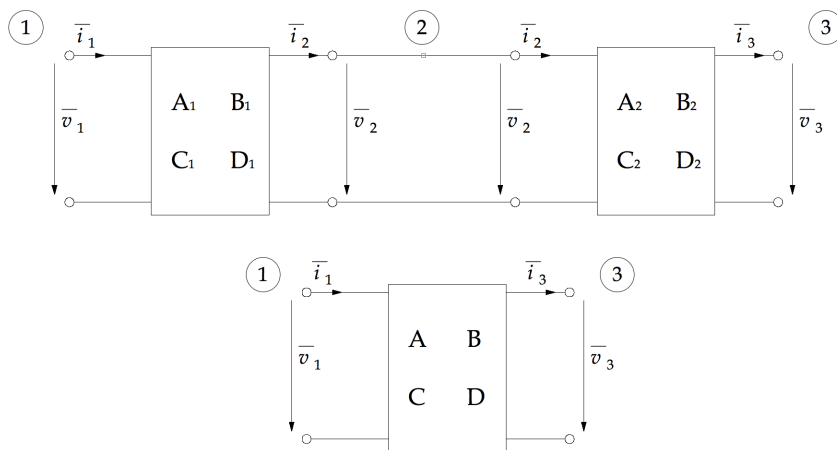


Fig. 43 Dos redes de dos puertas en cascada y red de dos puertas equivalente.

A partir de esta matriz de transmisión directa equivalente, y usando las reglas de transformación ya vistas (eq.3), es posible obtener los cuatro componentes de la matriz 2x2 de admitancias de la rama.

#### EJEMPLO:

Sea una línea eléctrica larga con condensadores en serie en ambos extremos (Fig. 44). Puede considerarse como una cascada de tres redes de dos puertas: un condensador en serie && una línea larga && otro condensador en serie.

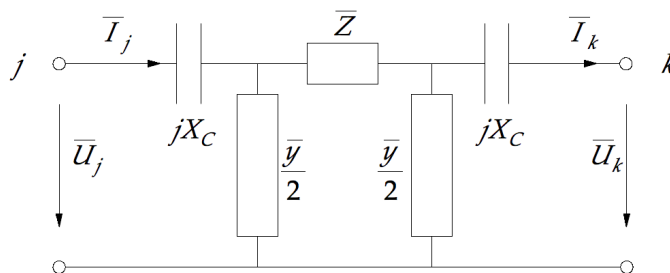


Fig. 44 Línea larga con condensadores en serie en ambos extremos.

Obtener la matriz de transmisión equivalente requiere, simplemente, multiplicar las matrices de transmisión de cada una de esas tres redes, así:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & jX_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\bar{y}}{2} \bar{Z} & \bar{Z} \\ \bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{4} \bar{Z} & 1 + \frac{\bar{y}}{2} \bar{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

```
FullSimplify[Dot[{1, X}, {0, 1}],
  {{{1 + Y Z, Z}, {Y + Y^2 Z, 1 + Y Z}}, {{1, X}, {0, 1}}]
  {{{1 + X Y + 1/4 Y (2 + X Y) Z, 1/4 (2 + X Y) (2 Z + X (4 + Y Z))},
  {1/4 Y (4 + Y Z), 1 + X Y + 1/4 Y (2 + X Y) Z}}
```

De nuevo Mathematica™ es la herramienta a utilizar. El resultado es ciertamente complicado de leer, pero si se dan valores numéricos a las impedancias y admitancias de la red, se obtienen simplemente 4 números complejos, con los que formar la matriz 2x2 de transmisión equivalente a la cascada completa.

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = 1 + \bar{X}_c \bar{y} + \frac{\bar{y}(2 + \bar{X}_c \bar{y})\bar{Z}}{4} \quad \bar{B} = \frac{(2 + \bar{X}_c \bar{y})(2\bar{Z} + \bar{X}_c(4 + \bar{y}\bar{Z}))}{4}$$

$$\bar{C} = \frac{\bar{y}(4 + \bar{y}\bar{Z})}{4} \quad \bar{D} = 1 + \bar{X}_c \bar{y} + \frac{\bar{y}(2 + \bar{X}_c \bar{y})\bar{Z}}{4}$$

A partir de esos 4 valores numéricos se obtienen después los 4 parámetros de la matriz de admitancias mediante las transformaciones ya deducidas al principio de esta sección (eq.3).

### 3.6 Transformadores como redes de dos puertas

Los transformadores son multipolos que mantienen una tensión distinta entre los terminales del lado primario y los del resto de devanados, que son los del lado secundario e incluso, en algunos, terciario.

Generalmente la diferencia que introducen afecta a los valores eficaces, que varían según una relación de transformación  $a$  que puede ser fija o cambiar por escalones entre unos márgenes reducidos. Pero también se utilizan transformadores que corrigen el desfase entre tensiones e intensidades de uno y otro lado, dentro de un cierto margen, actuando también sobre un cambiador de tomas que varía el ángulo de fase de las tensiones por escalones.

Un modelo equivalente por fase de un transformador trifásico referido al primario se reproduce en la Fig. 45 donde

$$\bar{Z}_{cc} = \frac{u_{cc}}{100} \frac{\bar{U}_k^2}{S_n}$$

siendo  $u_{cc}$  la tensión de cortocircuito en % y  $S_n$  la potencia nominal del transformador.

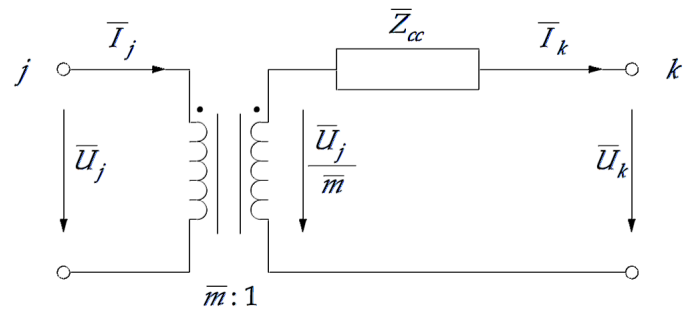


Fig. 45 Modelo equivalente por fase de un transformador.

La relación de transformación es  $\bar{m} : 1$ , lo que significa que la tensión en el primario es  $\bar{m}$  veces la tensión del secundario:

$$\bar{m} = \frac{\bar{U}_{\text{primario}}}{\bar{U}_{\text{secundario}}}$$

En un transformador ideal sin pérdidas, la potencia absorbida por el primario es igual a la entregada por el secundario, de manera que

$$\bar{S}_j = \bar{S}_k$$

donde  $\bar{S}_j = \bar{U}_j \bar{I}_j^*$  y  $\bar{S}_k = \frac{\bar{U}_j}{\bar{m}} \bar{I}_k^*$

Esa igualdad entre potencias resulta, para las intensidades, en

$$\bar{U}_j \bar{I}_j^* = \frac{\bar{U}_j}{\bar{m}} \bar{I}_k^*; \quad \bar{I}_j = \frac{1}{\bar{m}^*} \bar{I}_k$$

En la malla de la derecha también se cumple que

$$\bar{U}_k = -\frac{\bar{I}_k}{\bar{y}_{cc}} + \frac{\bar{U}_j}{\bar{m}}$$

Despejando  $\bar{U}_j$  se llega a  $\bar{U}_j = \bar{m} \bar{U}_k + \frac{\bar{m}}{\bar{y}_{cc}} \bar{I}_k$

Las expresiones halladas para  $\bar{U}_j$  e  $\bar{I}_j$  permiten obtener los parámetros de la matriz de transmisión de esta red, que es

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m} & \frac{\bar{m}}{\bar{y}_{cc}} \\ 0 & \frac{1}{\bar{m}^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{I}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m} & \frac{\bar{m}}{\bar{y}_{cc}} \\ 0 & \frac{1}{\bar{m}^*} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \bar{y}_{cc} = \frac{1}{\bar{Z}_{cc}}$$

También se pueden obtener fácilmente los parámetros de la matriz de admitancias. Una opción es aplicar las equivalencias con la matriz de transmisión que hemos calculado arriba. Otra es deducirla directamente así:

Como la intensidad  $\bar{I}_k$  puede expresarse en función de las tensiones del secundario y su impedancia de cortocircuito  $\frac{1}{\bar{Z}_{cc}} = \bar{y}_{cc}$ , puede ponerse que

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{U}_j / \bar{m} - \bar{U}_k}{\bar{Z}_{cc}} = \left( \frac{\bar{U}_j}{\bar{m}} - \bar{U}_k \right) \bar{y}_{cc} = \frac{\bar{U}_j}{\bar{m}} \bar{y}_{cc} - \bar{U}_k \bar{y}_{cc}$$

y entonces, aplicando la relación de transformación a las intensidades ya vista arriba,

$$\bar{I}_j = \frac{1}{\bar{m}^*} \left( \frac{\bar{U}_j}{\bar{m}} \bar{y}_{cc} - \bar{U}_k \bar{y}_{cc} \right) = \frac{\bar{U}_j}{\bar{m} \bar{m}^*} \bar{y}_{cc} - \frac{\bar{U}_k}{\bar{m}^*} \bar{y}_{cc}$$

Reordenando estos resultados obtenemos para las dos intensidades que

$$\bar{I}_j = \frac{\bar{y}_{cc}}{\bar{m} \bar{m}^*} \bar{U}_j - \frac{\bar{y}_{cc}}{\bar{m}^*} \bar{U}_k$$

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{y}_{cc}}{\bar{m}} \bar{U}_j - \bar{y}_{cc} \bar{U}_k$$

y cambiando el sentido de la del nudo  $k$  llegamos a la expresión habitual para obtener la matriz de admitancias de nudo para esta red de dos puertas:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_j \\ -\bar{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m} \bar{m}^*} \bar{y}_{cc} & -\frac{1}{\bar{m}^*} \bar{y}_{cc} \\ -\frac{1}{\bar{m}} \bar{y}_{cc} & \bar{y}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_j \\ \bar{U}_k \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{jj} & \bar{Y}_{jk} \\ \bar{Y}_{kj} & \bar{Y}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m} \bar{m}^*} \bar{y}_{cc} & -\frac{1}{\bar{m}^*} \bar{y}_{cc} \\ -\frac{1}{\bar{m}} \bar{y}_{cc} & \bar{y}_{cc} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \bar{y}_{cc} = \frac{1}{\bar{Z}_{cc}}$$

Si el transformador solo modifica el valor eficaz de la tensión, es decir, no altera el desfase entre tensiones e intensidades (o lo hace de acuerdo con una relación siempre fija que puede ignorarse) la relación de transformación es solo un número real  $m$ , y hay una red de dos puertas equivalente, que tiene la estructura típica de una línea larga modelo en "pi", y que es la de la Fig. 46.

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{jj} & \bar{Y}_{jk} \\ \bar{Y}_{kj} & \bar{Y}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m^2} \bar{y}_{cc} & -\frac{1}{m} \bar{y}_{cc} \\ -\frac{1}{m} \bar{y}_{cc} & \bar{y}_{cc} \end{bmatrix},$$

$$\text{con } \bar{y}_{cc} = \frac{1}{\bar{Z}_{cc}}$$

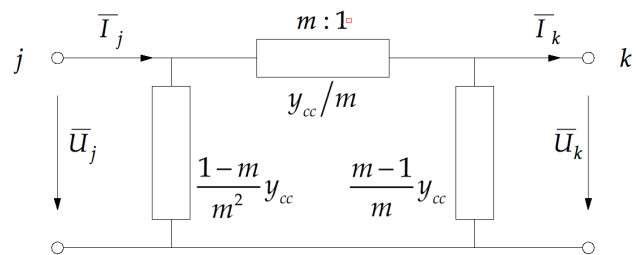


Fig. 46 Red de dos puertas equivalente a un transformador que solo modifica el valor eficaz de la tensión.

Los transformadores reguladores de tensión disponen de un mecanismo que cambia el contacto eléctrico de las bobinas del lado donde esté colocada la regulación, de manera que la bobina resultante tiene más o menos espiras activas según el escalón o toma en la que se sitúe el cambiador. Habitualmente las diferentes tomas se identifican con el porcentaje, respecto de la tensión nominal del devanado que corresponde al de su toma principal, de incremento o decremento de la tensión que producen respecto de la tensión en la toma principal.

**EJEMPLO 1:**

Un transformador 220 kV / 66 kV con regulación en el secundario de  $\pm 1.25\%$  en 4 escalones en cada sentido (9 tomas en total) permite obtener las siguientes tensiones en función de la toma en la que se coloque el regulador:

Toma	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Regulación	95.00%	96.25%	97.50%	98.75%	100%	101.25%	102.50%	103.75%	105.00%
Tensión primario kV	220	220	220	220	220	220	220	220	220
Tensión secundario kV	62.70	63.53	64.35	65.18	66	66.83	67.65	68.48	69.30
Relación $m$	3.5088	3.4632	3.4188	3.3755	3.3333	3.2922	3.2520	3.2129	3.1746

La posición central es la que suele corresponder a los valores nominales de la máquina. Así ocurre en este caso, pues en la toma 5 se obtienen los 220 000 V y 66 000 V nominales.

En la toma 3 y si la tensión del primario son 217 kV, se obtienen en el secundario

$$217 \div 3.4188 = 63.47 \text{ kV}$$

Si se desea que en esas condiciones de red haya al menos la tensión nominal en el secundario, entonces hay que pasar a la toma superior, por lo menos la 7, ya que en ella

$$217 \div 3.2520 = 66.73 \text{ kV}$$

Aunque no hay reglas exactas, lo habitual es que la regulación se coloque en el devanado que presente más ventajas constructivas. Para equipos cuya tensión más elevada para el material sea  $U_m \leq 72.5 \text{ kV}$  se elige el arrollamiento de más tensión porque así el cambiador de tomas resulta más sencillo de hacer: se involucran intensidades más pequeñas que si se eligiera el otro lado. Pero a partir de esa tensión los problemas de aislamiento inducen a preferir los arrollamientos de menor tensión, aunque el cambiador deba tener contactos y mecanismos más robustos para hacer frente a mayores intensidades.

**EJEMPLO 2:**

Se trata de un transformador que modifica en carga mediante un OLTC (*On-Load Tap-Changer*) la toma conectada en los arrollamientos del primario para ayudar a estabilizar la tensión de la red a través de 17 escalones de  $\pm 1.00\%$  cada uno, hacia ambos lados. Las tensiones del primario, si se trata de una máquina 45 kV / 45 kV, serán entonces las siguientes:

Toma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Regulación	92%	93%	94%	95%	96%	97%	98%	99%	100%	101%	102%	103%	104%	105%	106%	107%	108%
$U$ primario kV	41.40	41.85	42.30	42.75	43.20	43.65	44.10	44.55	45.00	45.45	45.90	46.35	46.80	47.25	47.70	48.15	48.60
$U$ secundario kV	--- 45.00 ---																
Relación $m$	0.920	0.930	0.940	0.950	0.960	0.970	0.980	0.990	1.000	1.010	1.020	1.030	1.040	1.050	1.060	1.070	1.080



Si estando en la toma 12 la tensión de red en el primario fueran 45.98 kV, entonces en el secundario el transformador ofrecería

$$45.98 \div 1.030 = 44.64 \text{ kV}$$

#### 4 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Obtener las matrices de transmisión y de admitancias de un transformador como el del ejemplo 1, para sus valores nominales, sabiendo que su  $Z_{cc} = j 130 \Omega$ .

Solución:

Se trata de un transformador que varía el valor eficaz de las tensiones y no los desfases, de manera que la relación de transformación es un número real, el ya calculado en la tabla del ejemplo.

Así pues  $m = 3.3333$  y

$$a = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \frac{m}{y_{cc}} \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad y_{cc} = \frac{1}{Z_{cc}} = \frac{1}{130} \Omega^{-1}, \text{ luego } a = \begin{bmatrix} 3,333 & 433,33 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Si se asume, como es bastante habitual, que la impedancia del transformador es toda reactancia, la matriz de admitancias es

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m^2} y_{cc} & -\frac{1}{m} y_{cc} \\ -\frac{1}{m} y_{cc} & y_{cc} \end{bmatrix}, \text{ luego } Y = \begin{bmatrix} 6,924 \times 10^{-4} & -2,308 \times 10^{-3} \\ -2,308 \times 10^{-3} & 7,692 \times 10^{-3} \end{bmatrix} j \Omega^{-1}$$

2. Calcular la primera posición adecuada en la que debe colocarse el DECT (*De-Energized Tap Changer*) de un transformador de 66 kV / 20 kV que tiene regulación en el primario del tipo  $\pm 2.5 \pm 5 \pm 7.5 \pm 10\%$  para que ofrezca como máximo 20 kV en el secundario cuando la tensión de red en el primario es de 69.2 kV.

Solución:

La regulación significa que las tensiones y relaciones de transformación son las de la tabla siguiente:

Toma	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Regulación	90.00%	92.50%	95.00%	97.50%	100%	102.50%	105.00%	107.50%	110.00%
Tensión primario kV	59.40	61.05	62.70	64.35	66	67.65	69.30	70.95	72.60
Tensión secundario kV	--- 66 ---								
Relación $m$	2.9700	3.0525	3.1350	3.2175	3.3000	3.3825	3.4650	3.5475	3.6300

Estando la tensión de red en el primario por encima de su valor nominal, es necesario que el transformador reduzca más la tensión que lo que lo hace nominalmente. Por tanto debemos elegir relaciones de transformación mayores que la nominal:

Toma 5 (nominal):	$69.2 \div 3.3000 = 20.97 \text{ kV}$
Toma 6:	$69.2 \div 3.3825 = 20.46 \text{ kV}$
Toma 7:	$69.2 \div 3.4650 = 19.97 \text{ kV}$

La primera toma adecuada es la toma 7.

**3.** Un transformador colocado en la conexión a la red de una minicentral debe elevar la tensión desde los 6.3 kV nominales del generador hasta los 66 kV nominales de la red. Dispone de un cambiador de tomas en carga OLTC (*On Load Tap Changer*) en el secundario de 9 escalones  $\pm 2.5\%$  centrados a ambos lados de la toma central, a la que corresponden las tensiones nominales 66 kV / 6.3 kV. En estas condiciones, determinar:

- La posición más conveniente del cambiador automático si la tensión de la red cae a 61 kV.
- Si el generador tiene un rango de regulación del  $\pm 5\%$  de su tensión nominal, en qué se convierte este rango desde la perspectiva de la red.

Solución:

Las relaciones de transformación son las de la tabla:

Toma	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Regulación en secundario	90.00%	92.50%	95.00%	97.50%	100%	102.50%	105.00%	107.50%	110.00%
Tensión primario kV	66.00								
Tensión secundario kV	5.67	5.83	5.99	6.14	6.30	6.46	6.62	6.77	6.93
Relación $m$	11.6402	11.3256	11.0276	10.7448	10.4762	10.2207	9.9773	9.7453	9.5238

- En la toma 8 el transformador *podría* elevar los 6.3 kV del generador hasta

$$6.30 \times 9.7453 = 61.4 \text{ kV}$$

Dado que la red está a 61 kV el generador podría verse obligado a bajar hasta

$$61 \div 9.7453 = 6.26 \text{ kV}$$

en caso de que no tuviera potencia suficiente para elevar la tensión de la red hasta los 61.4 kV manteniendo su tensión en el valor nominal de 6.3 kV.

- La mínima tensión en el primario del transformador se obtiene cuando el generador trabaja a su mínima tensión y el transformador la eleva lo menos posible, es decir, ofrece la relación de transformación más pequeña porque el OLTC está en la posición 9:

Mínima tensión del generador:	$6.30 \times (1 - 0.05) = 5.985 \text{ kV}$
Relación de transformación:	9.5238 (pos 9)
Mínima tensión en primario:	$5.985 \times 9.5238 = 57.0 \text{ kV}$

La máxima tensión será, por un razonamiento simétrico:

Máxima tensión del generador:	$6.30 \times (1 + 0.05) = 6.615 \text{ kV}$
Relación de transformación:	11.6402 (pos 1)
Máxima tensión en primario:	$6.615 \times 11.6402 = 77.0 \text{ kV}$

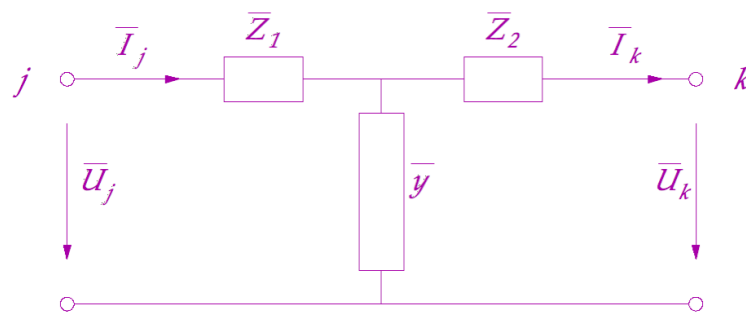


Desde la perspectiva de la red, por tanto, la central puede regular su tensión entre 77 kV y 57 kV. Teniendo en cuenta que su tensión nominal es de 66 kV, este rango se traduce en

Por exceso:  $77 - 66 = 11 \text{ kV}$  (+16.67% de la tensión nominal)  
 Por defecto:  $57 - 66 = -9 \text{ kV}$  (-13.64% de la tensión nominal)  
 Rango de regulación:  $66 \text{ kV}$   $\begin{matrix} +16,67\% \\ -13,64\% \end{matrix}$

## 5 PROBLEMAS PROPUESTOS

**2.A.** Determinar los parámetros de transmisión de la red de dos puertas adjunta. Hallar a partir de ellos los términos de la matriz de admitancias  $Y$ .



Respuestas:

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \bar{y} \bar{Z}_1 & \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{y} \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \\ \bar{y} & 1 + \bar{y} \bar{Z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{jj} & \bar{Y}_{jk} \\ \bar{Y}_{kj} & \bar{Y}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 + \bar{y} \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{y} \bar{Z}_1 \bar{Z}_2} & \frac{-1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{y} \bar{Z}_1 \bar{Z}_2} \\ \frac{-1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{y} \bar{Z}_1 \bar{Z}_2} & \frac{1 + \bar{y} \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{y} \bar{Z}_1 \bar{Z}_2} \end{bmatrix}$$

**2.B.** Comprobar, aplicando la definición, que la red de dos puertas formada por un condensador en serie tiene matriz de admitancias, pero que la formada por una reactancia en paralelo no la tiene.

**2.C.** Transformar la matriz de transmisión equivalente del circuito de la fig. 23 a matriz de admitancias de nudo mediante las equivalencias directas.

**2.D.** Obtener directamente la matriz de admitancias del modelo de transformador como

red de dos puertas por transformación directa de la matriz de transmisión, mediante las equivalencias de la sección 3.2, p. 60, y comprobar que el resultado coincide con el deducido en la sección 3.6, pp. 67 y ss.

**2.E.** Suponga un transformador de regulación 132 kV / 132 kV con un cambiador de tomas en carga OLTC en el primario, de 9 escalones  $\pm 0.5\%$  cada uno hacia ambos lados de la toma central, a la que corresponden las tensiones nominales. Si el regulador está en la posición 8, determinar:

- a) La relación de transformación exacta  $m$  para esa toma
- b) Si la tensión de la red en el primario fuera de 134 kV, la tensión del secundario

Respuestas:  $m = 1.0150, 132.02$  kV

**2.F.** Un pequeño transformador de 60 kV / 15 kV tiene un cambiador de tomas en el secundario, de 9 escalones  $\pm 1.25\%$  cada uno hacia ambos lados de la toma central, a la que corresponden las tensiones nominales. Determinar:

- a) Si la tensión de la red en el primario fuera de 62 kV, la tensión del secundario para la posición 2 del cambiador
- b) En qué posición habría que colocar el cambiador para que la tensión del secundario fuera próxima a la nominal cuando la tensión del primario fuera de 60.75 kV
- c) La posición del cambiador para dar la tensión nominal del secundario si la red ofrece 55 kV en el primario

Respuestas: a) 14.92 kV    b) pos 4    c) fuera del alcance del transformador

**2.G.** Obtener la matriz de transmisión y la matriz de impedancias de un transformador regulador de tensión que sólo varía el módulo de la tensión, siendo su relación de transformación  $m = 1.05$  y su reactancia de cortocircuito de  $10 \Omega$ .

Respuestas:  $a = \begin{bmatrix} 1.0500 & 10.5000 \\ 0 & 0.9524 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} 0.0907 & -0.0952 \\ -0.0952 & 0.1000 \end{bmatrix} j \Omega^{-1}$