



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIERÍA INDUSTRIAL

Avda. Fernando Ballesteros,2
37700 BÉJAR
Fax 923 40 81 27
Telf. 923 40 80 80

ÁREA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

APUNTES DE LA ASIGNATURA

CURSO 2025-2026

Prof. Norberto Redondo Melchor
Ingeniero Industrial
Doctor por la Universidad de Salamanca

Béjar (Salamanca - España)

Copyright

© Norberto Redondo Melchor (NRM) 2012-2025

Todos los derechos reservados

Reproducción autorizada siempre que se haga de todo el documento íntegro y sin alterarlo lo más mínimo, incluyendo esta nota.



ÍNDICE

1. ESTRUCTURA Y REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS DE POTENCIA

1 Sistema básico

2 Sistemas reales

3 Control y gestión de los sistemas de potencia

- 3.1 Despacho eléctrico y despacho económico
- 3.2 Aparatos para medir magnitudes eléctricas en alta tensión
- 3.3 Completitud y exactitud de las lecturas

4 Tratamiento de lecturas de medidas eléctricas

- 4.1 Errores en las medidas
- 4.2 El problema de la estimación de los valores correctos
- 4.3 Solución mediante el método de los mínimos cuadrados
- 4.4 Errores relativos y precisión de los aparatos

5 Tratamiento de los datos espurios o aberrantes

- 5.1 Procedimiento general
- 5.2 Probabilidad de existencia de lecturas erróneas
- 5.3 Localización de valores aberrantes
- 5.4 Otros métodos estadísticos

6 Ejercicios resueltos

2. MODELO ELÉCTRICO DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

1 Análisis de redes malladas

- 1.1 Método de análisis
- 1.2 Fuentes de intensidad con un terminal común referencia de potenciales
- 1.3 Fuente de tensión
- 1.4 Modelo y solución de la red

2 Redes de secuencia y esquema unifilar

- 2.1 Componentes simétricas
- 2.2 Impedancias para los distintos sistemas
- 2.3 Redes de secuencia
- 2.4 Diagrama de redes equivalentes
- 2.5 Esquema unifilar

3 Redes de dos puertas y parámetros de transmisión

- 3.1 Redes de dos puertas
- 3.2 Parámetros de transmisión y matriz de admitancias
- 3.3 Líneas como redes de dos puertas
- 3.4 Condensadores en serie y reactancias en paralelo
- 3.5 Conexiones de dos redes de dos puertas entre sí
- 3.6 Transformadores como redes de dos puertas

4 Problemas resueltos

5 Problemas propuestos

3. ESTUDIO DE SISTEMAS (I): ANÁLISIS DE FLUJOS DE CARGA

1 Flujos de carga en sistemas de potencia

2 Método de resolución de problemas de flujo de cargas

- 2.1 Datos iniciales
- 2.2 Tensiones de nudo
- 2.3 Intensidades de fuente en cada nudo
- 2.4 Potencias de fuente en cada nudo
- 2.5 Matriz de admitancias
- 2.6 Redes de dos puertas y matriz de admitancias
- 2.7 Planteamiento del problema y solución
- 2.8 Potencias de todas las fuentes
- 2.9 Potencia que se entrega a cada línea
- 2.10 Pérdidas de potencia en la red y rendimiento

3 Solución del problema mediante el método iterativo Newton-Raphson

4 Líneas aéreas

5 Líneas subterráneas

6 Transformadores

7 Problemas resueltos

4. ESTUDIO DE SISTEMAS (II): SITUACIONES ESTABLES

1 Consideraciones generales

2 Análisis de sistemas sencillos

- 2.1 Dos nudos y una línea
- 2.2 Otros sistemas más complejos
- 2.3 Funcionamiento de la herramienta de cálculo (Flujos 060)
- 2.4 Cálculos con Mathematica®
 - 2.4.1 Algoritmo general
 - 2.4.2 Ejemplo 01: línea 132 kV
 - 2.4.3 Ejemplo 02: transformador elevador de 200 MVA



3 Tipos de análisis

- 3.1 Mantenimiento de la tensión
 - 3.1.1 Alternadores de las centrales
 - 3.1.2 Transformadores reguladores
- 3.2 Nuevas líneas y desarrollo de la red
- 3.3 Generación distribuida
- 3.4 Ajustes de protecciones automáticas

4 Problemas resueltos

5. ESTUDIO DE SISTEMAS (III): CORTOCIRCUITOS

- 1 Matriz de impedancias de nudo**
- 2 Cortocircuitos trifásicos equilibrados**
- 3 Cortocircuitos bifásicos y fallos a tierra**

6. CONTROL DE SISTEMAS (I): DESPACHO ECONÓMICO

- 1 Introducción**
- 2 Las Reglas de Funcionamiento del Mercado de Producción de Energía Eléctrica**
 - 2.1 Mercados diario, intradiario y de servicios complementarios
 - 2.2 Ejemplo de resultados
- 3 La contratación directa bilateral**
- 4 La utilización de las redes ajenas y de las interconexiones**
 - 4.1 ATR regulado
 - 4.2 Líneas directas
- 5 Problemas de despacho económico**
- 6 Problemas propuestos**

7. CONTROL DE SISTEMAS (II): DESPACHO ELÉCTRICO

- 1 Introducción**
- 2 Los Procedimientos de Operación**
- 3 Los mecanismos de regulación del sistema en tiempo real**
 - 3.1 Regulación a cargo de los agentes del mercado
 - 3.2 Regulación a cargo del operador del sistema Red Eléctrica Española
 - 3.3 Reposición del servicio: arranque autónomo
- 4 El Servicio complementario de control de tensión de la red**
 - 4.1 Sujetos implicados

- 4.1.1 El operador del sistema
- 4.1.2 Los proveedores del servicio
- 4.2 Actuaciones que comprende el servicio de control de la tensión
 - 4.2.1 Actuaciones obligatorias a cargo de las centrales generadoras
 - 4.2.2 Actuaciones obligatorias del gestor de la red de transporte
 - 4.2.3 Prestaciones obligatorias a cargo de los consumidores proveedores del servicio
 - 4.2.4 Prestaciones obligatorias a cargo de los gestores de las redes de distribución
 - 4.2.5 Actuaciones de prestación voluntaria
- 4.3 Funcionamiento práctico del sistema de control de la tensión de la red
 - 4.3.1 Criterios seguidos por el operador del sistema
 - 4.3.2 Reacción ante circunstancias excepcionales
 - 4.3.3 Resultados de un día de máxima demanda

5 Problemas resueltos

6 Problemas propuestos

8. TRANSPORTE DE ENERGÍA EN CORRIENTE CONTINUA

1 Introducción

2 Ventajas e inconvenientes

3 Aplicaciones

4 Estaciones convertidoras

5 Tipos de líneas de corriente continua

- 5.1 Configuración monopolar
- 5.2 Configuración bipolar
- 5.3 Configuración homopolar

6 Topología de las redes de corriente continua

7 Convertidores de corriente

- 7.1 Tecnología LCC (*Line Commutated Converter* - Convertidor Conmutado por la Red)
- 7.2 Tecnología VSC (*Voltage Source Converter*)

1. ESTRUCTURA Y REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS DE POTENCIA

1 SISTEMA BÁSICO

La Fig. 1 es el esquema unifilar de un sistema de potencia tradicional. El alternador entrega energía eléctrica mediante un sistema trifásico de tensiones equilibradas de unos pocos kilovoltios. El transformador eleva esa tensión a varias decenas o centenares de kilovoltios, para que el transporte de energía por la línea se efectúe mediante un sistema trifásico de intensidades relativamente pequeñas. Así se salvan grandes distancias, que son las que separan las centrales eléctricas de los centros de consumo. Al final de la línea otro transformador reduce la tensión a niveles aceptables por la carga conectada, que es la que consume la energía eléctrica transformándola en otro tipo de energía según necesidad. Las altas tensiones permiten emplear intensidades pequeñas, lo que reduce las pérdidas y mejora el rendimiento del transporte de energía del generador hasta la carga.

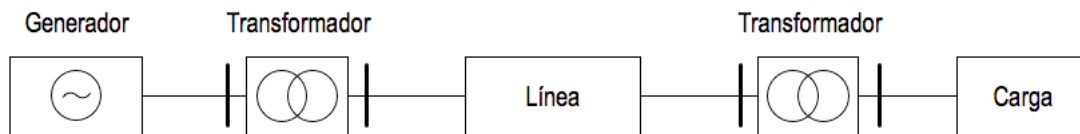


Fig. 1. Sistema eléctrico de potencia básico.

2 SISTEMAS REALES

Los sistemas reales reproducen este sistema simple añadiendo más elementos en serie y en paralelo. Así se configuran redes muy complejas, que pueden ser ramificadas aunque a nivel de las grandes líneas son malladas, es decir, se forman bucles con las ramas de la red. En una red mallada el flujo de energía de los generadores a las cargas no sigue un único camino, como en una red ramificada, sino que tiene más alternativas.

Los sistemas reales pueden ser aislados y aún así alcanzar notable complejidad. Los ejemplos más bonitos, aunque pueden ser no mallados, son los grandes navíos: portacontenedores, petroleros, transatlánticos, etc. La Fig. 2 reproduce un esquema unifilar de un sistema de este tipo, perteneciente a un navío con dos motores principales, para sendas hélices mayores.

El sistema nacional es mucho mayor. También se reproduce el mapa general proporcionado por Red Eléctrica de España, que es la empresa encargada de su funcionamiento, mantenimiento y desarrollo.

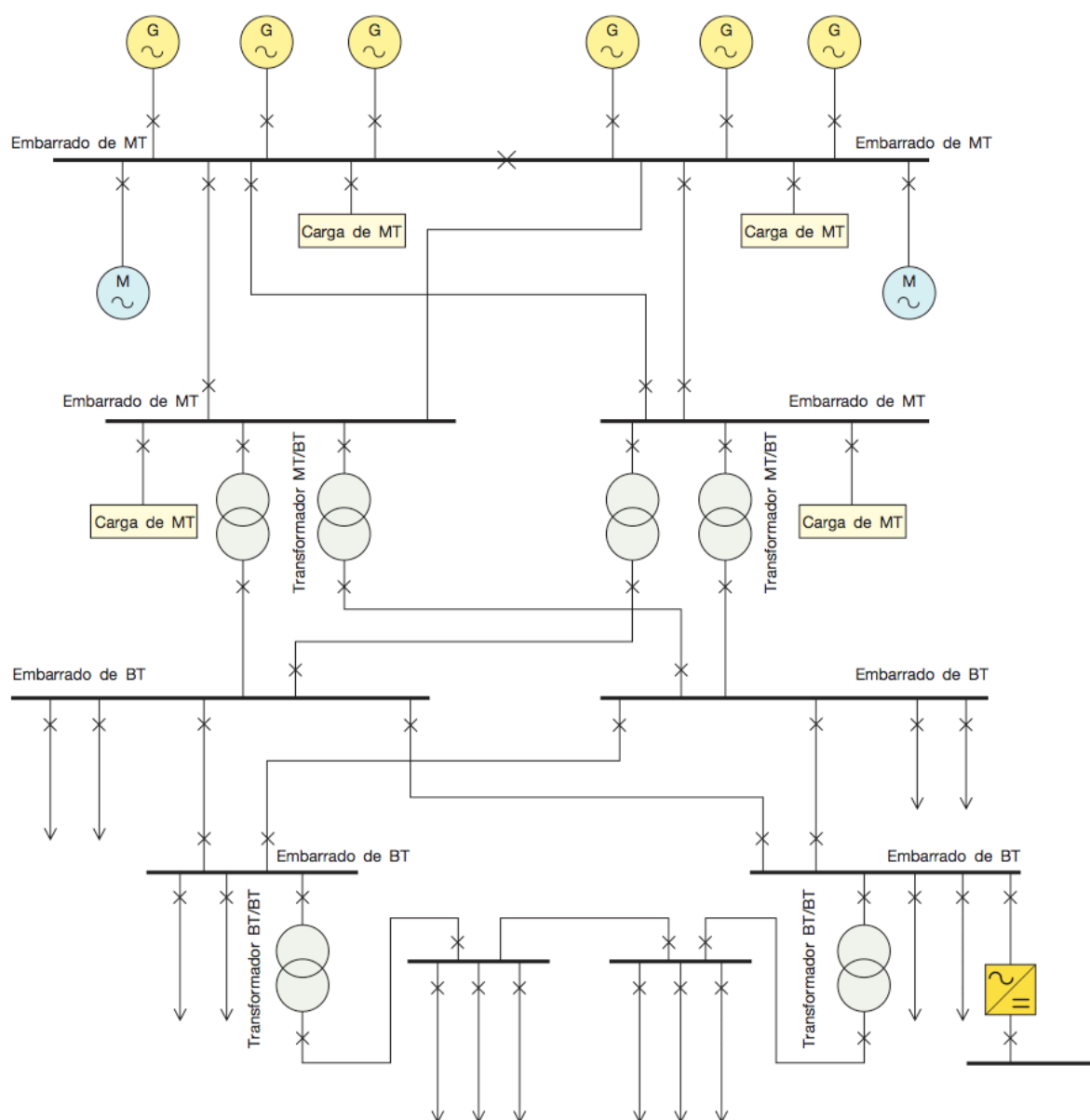


Fig. 2. Sistema eléctrico de potencia autónomo: un barco.
 Fuente: ABB, Cuaderno de aplicaciones técnicas nº11, p. 16.

Los sistemas eléctricos nacionales (véase la ilustración con las líneas principales del sistema español, Fig. 3), alcanzan una elevada complejidad.

Y la red está en constante evolución y crecimiento. Basta comparar los datos de hace 10 años para comprobar que se han creado más kilómetros de líneas de transporte en España, y que el número de centrales también ha crecido (eólicas y fotovoltaicas sobre todo).

Esto significa que la red incrementa sus interconexiones internas y hacia el exterior (Francia, Portugal y Marruecos), adquiriendo progresivamente mayor nivel de mallado interno, es decir, aumentando el número de mallas que se forman a partir de las ramas existentes y de las nuevas ramas. Como veremos en temas posteriores, el grado de mallado incrementa la fiabilidad de la red, y permite aumentar también su rendimiento general en términos energéticos. También es posible que se incremente así la eficiencia económica de todo el sistema.

Instalaciones de la red de transporte en España

	400 kV		≤ 220 kV		Total
	Península	Península	Baleares	Canarias	
Total líneas (km)	19.622	17.773	1.539	1.299	40.233
Líneas aéreas (km)	19.567	17.235	1.089	1.023	38.914
Cable submarino (km)	29	236	306	15	586
Cable subterráneo (km)	26	302	145	261	733
Transformación (MVA)	71.509	63	2.248	1.375	75.195

Datos de km de circuito y capacidad de transformación a 31 de diciembre del 2011.

Instalaciones de la red de transporte en España

	400 kV		≤ 220 kV		Total
	Península	Península	Baleares	Canarias	
Total líneas (km)	21.768	19.493	1.929	1.578	44.769
Líneas aéreas (km)	21.651	18.702	1.141	1.237	42.731
Cable submarino (km)	29	236	582	30	877
Cable subterráneo (km)	88	556	206	311	1.161
Transformación (MVA)	84.790	1.363	3.838	3.880	93.871

Fuente: Red Eléctrica de España S.A., Avances de los informes 2011 y 2021.
Disponibles en www.ree.es

3 CONTROL Y GESTIÓN DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

La disponibilidad de energía eléctrica en todos los puntos de la red en condiciones reglamentarias de calidad exige que la oferta iguale exactamente a la demanda más las pérdidas en todo momento.

Si la oferta, es decir, la energía entregada a la red por los generadores, supera a la demanda global, esto es, la necesidad de energía de los consumidores más las pérdidas del sistema, entonces la tensión de la red se eleva y la frecuencia tiende a aumentar.

Por el contrario, si la oferta es menor que la demanda más las pérdidas, la tensión cae y la frecuencia tiende a bajar. Legalmente el límite de variación permitido es muy pequeño, distinto para cada escalón de tensión, por lo que la red funciona sobre la base de que la tensión sea prácticamente constante para cualquier intensidad que circule por ella. Es por esto por lo que la red se considera normalmente como una fuente de tensión.

En la práctica la estabilidad de tensiones es el resultado de un continuo ajuste de la generación para igualar a la demanda, y también de ciertas maniobras en algunos nudos de la red dotados de transformadores reguladores de la tensión.

Todo ello se consigue mediante un sistema informático que lee permanentemente las medidas eléctricas proporcionadas por los multímetros colocados en numerosos puntos estratégicos de la red, calcula el estado del sistema y devuelve las consignas apropiadas para que los generadores varíen su potencia de manera coherente con las necesidades de cada zona.



3.1 Despacho eléctrico y despacho económico

Se conoce como despacho eléctrico el conjunto de órdenes emitidas desde el control centralizado del sistema para que los generadores modifiquen la energía que vierten a la red en cada momento. Modernamente también se emiten órdenes de despacho eléctrico a ciertos grandes consumidores, para que éstos reduzcan o aumenten la demanda de energía en determinados períodos. El despacho eléctrico se estudia en el tema 6.

RED ELÉCTRICA DE ESPAÑA																							
COEFICIENTES DE PÉRDIDAS MARGINALES DE LA RED DE TRANSPORTE																							
16/2/2012																							
hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	hora	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
442	QUINTOS (220 kV)																						
443	SANTIPONCE (220 kV)																						
445	BAJO DE LA ENCANTADA (220 kV)																						
446	TORRE ARENILLAS (220 kV)																						
447	VENTA INES (220 kV)																						
448	VILLANUEVA DEL REY (220kV)																						
449																							
454	NUDO DE VALOR MÁXIMO																						
455	NUDO DE VALOR MÍNIMO																						

Fig. 5. Cálculos para la red eléctrica española.

Las órdenes de despacho dependen además del resultado de una estimación previa, pero esta vez de orden económico. El despacho económico es la programación que hace el gestor del sistema de qué centrales intermedias más que satisfagan la demanda de la red en un período

dato, por resultar las que más barato ofrecen la energía necesaria para ese momento. Este despacho se estudia en el tema 6, y se lleva a cabo mediante otro sistema informático que también utiliza los datos leídos por el sistema de despacho eléctrico, y los hace coincidir con las ofertas de los generadores y las demandas de los consumidores comunicadas con cierta antelación, normalmente de un día completo.



Fig. 6 Centro de control eléctrico de Red Eléctrica de España
Fuente: www.ree.es

El SIMEL es el sistema informático organizado por Red Eléctrica de España para obtener lecturas de miles de aparatos medidores instalados en toda la red, incluyendo los situados en los puntos relevantes para su gestión, que son los puntos de conexión entre generadores y la red pública, entre la red española y las redes extranjeras (portuguesa, francesa y marroquí), y entre redes de transporte y redes de distribución.

Capacidad de intercambio comercial (MW) del 15/08/2020 al 28/08/2020



Conexión	Mínimo	Máximo
Francia - España	950	2200
España - Francia	1100	1900
Portugal - España	1200	3900
España - Portugal	2600	3700
Marruecos - España	600	600
España - Marruecos	900	900

Fig. 7. Interconexiones y potencia intercambiable en cada sentido con las redes extranjeras. Fuente: www.ree.es

3.2 Aparatos para medir magnitudes eléctricas en alta tensión

Ambos despachos, el eléctrico y el económico, necesitan pues un conjunto de lecturas del estado real del sistema, que se obtiene de los multímetros dispersos por la red.

Se trata de voltímetros y amperímetros para medir los valores eficaces de tensiones e intensidades, pero también se emplean vatímetros y varímetros para medir potencias activas y reactivas, fasímetros para medir desfases entre tensiones e intensidades, y frecuencímetros para medir la frecuencia de la red.

Necesitan transformadores que acoplan los rangos de las magnitudes a medir a los valores que cada aparato puede tolerar.

Todos los instrumentos son objeto de una cuidada selección y de una precisa calibración, y después reciben un delicado tratamiento para su instalación y mantenimiento.



1. Compensador de volumen de aceite
2. Indicador de nivel de aceite
3. Terminal primario
4. Núcleos y arrollamientos secundarios
5. Conductor primario
6. Conductores secundarios
7. Aislador (porcelana o silicona)
8. Borna condensadora
9. Conexión de tierra reforzada
10. Toma de muestras de aceite

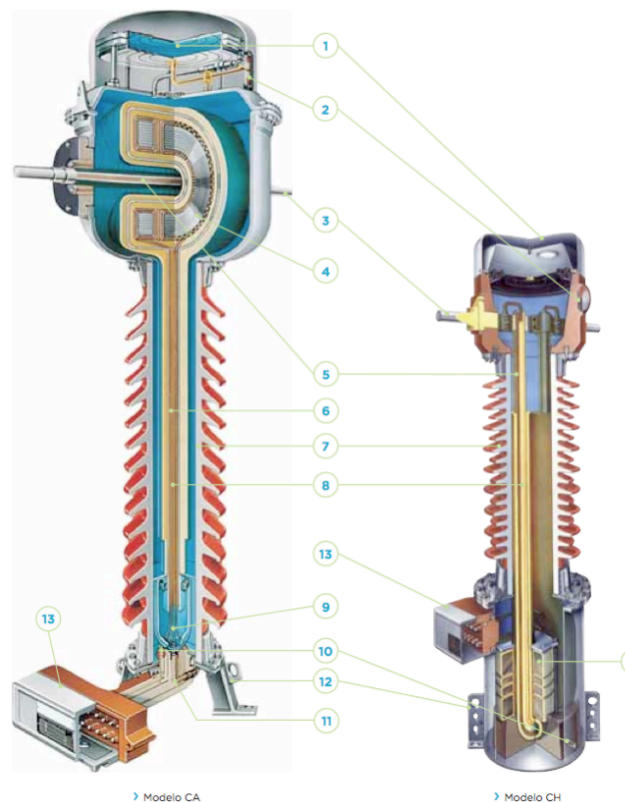


Fig. 8. Transformadores de intensidad para 420 kV de ARTECHE

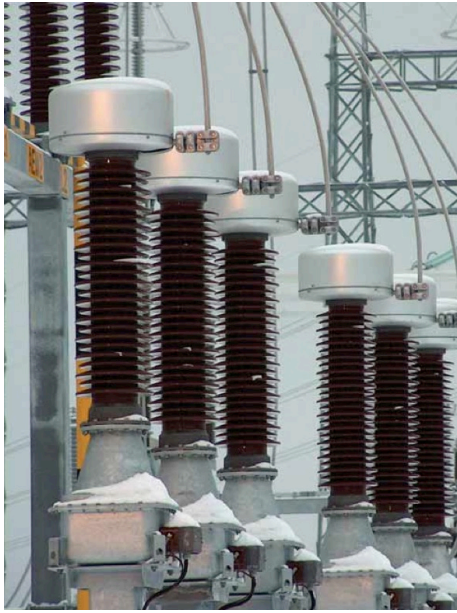


Fig. 9. Transformadores de tensión inductivos para 132 kV de ARTECHE

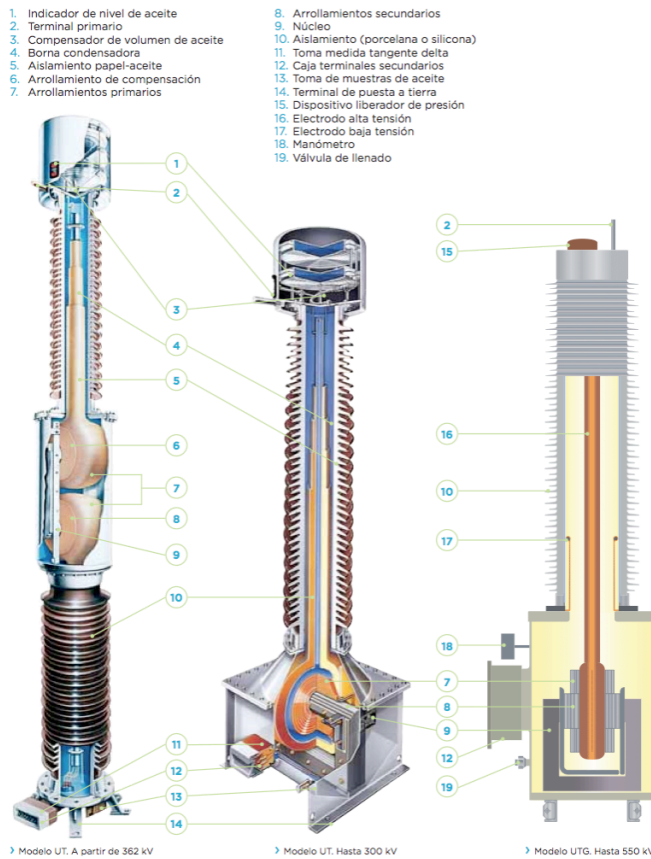
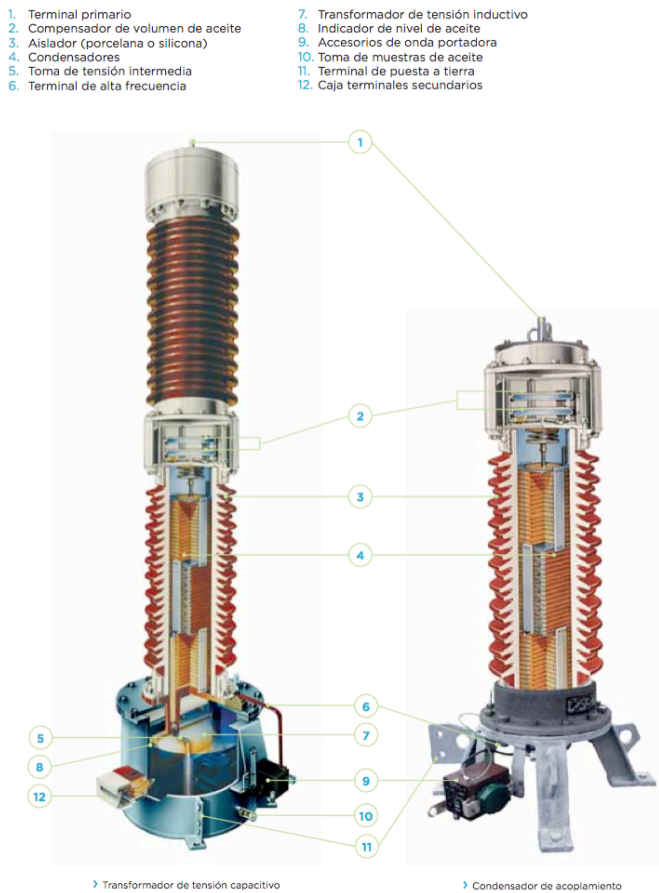
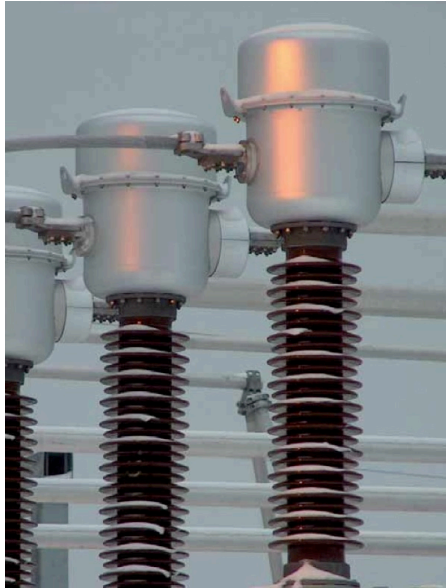
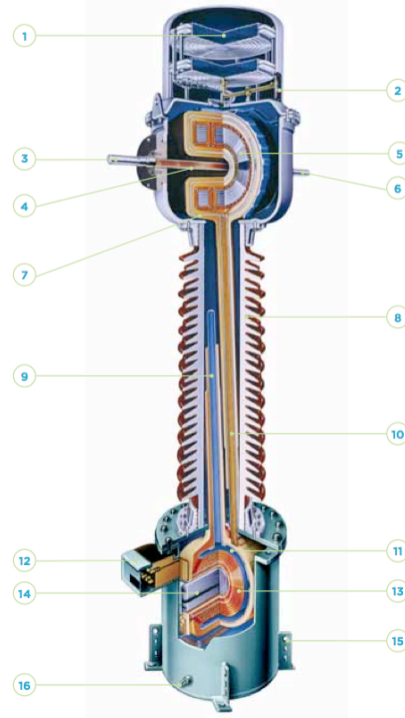


Fig. 10. Transformadores de tensión capacitivos para 420 kV de ARTECHE





1. Compensador de volumen de aceite
2. Indicador de nivel de aceite
3. Terminal primario (P1)
4. Conductor primario de TI
5. Bobinado secundario de TI
6. Terminal primario (P2)
7. Núcleos de TI
8. Aislamiento porcelana o silicona
9. Borna condensadora TT
10. Borna condensadora TI
11. Bobinado primario de TT
12. Caja terminales secundarios
13. Bobinado secundario de TT
14. Núcleo de TT
15. Terminal de puesta a tierra
16. Toma de muestras de aceite



> Hasta 245 kV

Fig. 11. Transformadores combinados de intensidad y de tensión inductivos para 132 kV de ARTECHE

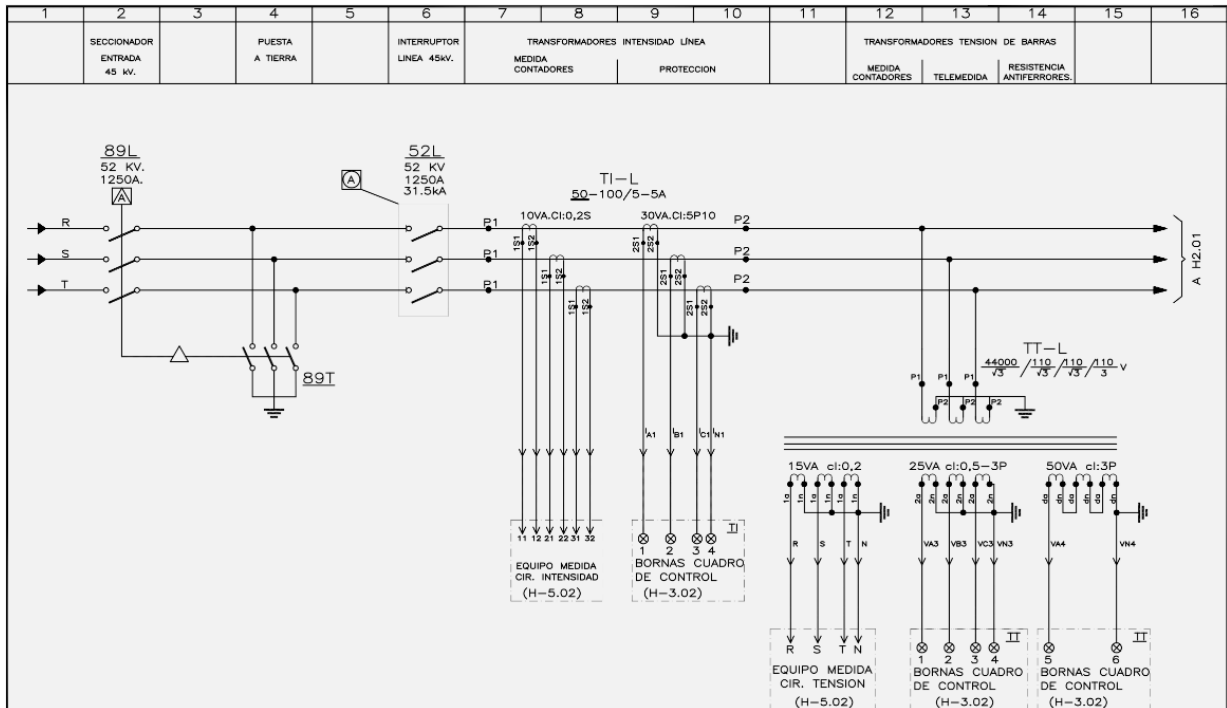


Fig. 12. Transformadores de medida (y protección) en una subestación. Fuente: *Elecnor S.A.*



Fig. 13 Juego trifásico de transformadores de intensidad

Lo habitual es que estos aparatos estén colocados en las subestaciones de salida de las centrales y en las subestaciones de las redes de transporte y distribución.

En la Fig. 12 se representa, en las posiciones del plano 7 a 10, un conjunto de tres transformadores de intensidad monofásicos de doble secundario cada uno, conectados para configurar un conjunto trifásico de transformadores de intensidad. Su aspecto externo puede ser como los de la Fig. 13.

Pueden tener doble o hasta triple secundario, de manera que puedan ofrecer medidas tanto para facturación de la generación o el consumo, como para informar a los relés de protección. En cada caso las características de precisión suelen pedirse distintas.

Veamos:

El estándar europeo que regula estos transformadores pertenece a la familia de normas de la CEI Comisión Electrotécnica Internacional (IEC *International Electrotechnical Commission*) número IEC 61869.

Según este estándar, las clases de precisión son las de la tabla de la derecha para los *transformadores de intensidad* (UNE-EN IEC 61869-10:2020):

Precisión nominal	Transformadores de intensidad pasivos de baja potencia para...
Clase 0.1	Medida en laboratorios
Clase 0.2 (*)	Medida para facturación de generación y demanda
Clase 0.5 (*)	
Clase 1	Medida para análisis de redes
Clase 3	Medidas aproximadas
Clase 5TPE	Protección, en combinación con relés
Clase 5P	
Clase 10P	

(*) Las clases 0.2S y 0.5S ofrecen la precisión exigida por la norma en un rango ligeramente más extenso (hasta un 1% más de la intensidad nominal del primario).

La cifra que acompaña a la palabra 'Clase' en los transformadores para *medida* es el error de precisión máximo ε (épsilon) en tantos por ciento que afecta a la relación de transformación K del aparato dentro de su rango de medida nominal (1):

$$K = K_n \pm \varepsilon \% = \frac{I_{np}}{I_{ns}} \pm \frac{\text{clase}}{100}$$

Ejemplo: la clase 0.5 implica que el error de precisión será como máximo del $\pm 0.5\%$ de la relación de transformación. Para un transformador de intensidad (TI) de relación 100:5 y clase 0.5, una intensidad primaria de 85 A puede

¹ Véanse en la norma UNE-EN IEC 61869-99 las definiciones de *error de relación* (apartado 3.5.6), *error de fase* (3.5.8) y *clase de precisión* (3.5.11), y en la EN 61869-2 la forma de calcular la clase de precisión de los transformadores de intensidad para medida, como el porcentaje máximo admisible del error de relación.



resultar en una intensidad secundaria de

$$K = \frac{I_p}{I_s}; \quad I_s = \frac{I_p}{K} = \frac{I_p}{K_n \pm \varepsilon \%} = \frac{I_p}{\frac{I_{np}}{I_{ns}} \pm \frac{\text{clase}}{100}};$$
$$I_s = \frac{85}{\frac{100}{5} \pm \frac{0.5}{100}} = 4.25 \pm 0.00106 \text{ A}$$

A veces se indica también el *factor de seguridad (FS)* que indica a partir de qué intensidad primaria se satura de flujo magnético el núcleo metálico del transformador para medida y éste pierde su precisión:

$$I_{\text{saturación}} = FS \times I_{np}$$

Cuando la intensidad por el primario del TI es muchas veces mayor que su intensidad primaria nominal, lo que ocurre si hay un cortocircuito aguas abajo de su punto de instalación, por ejemplo, la intensidad que proporciona el secundario del TI y que circulará por el contador de medida será también varias veces superior a la intensidad secundaria nominal del transformador. Esto implica riesgo de avería en el contador. Para evitarlo se eligen TIs para medida con *FS* bajo, por ejemplo, *FS* = 5.

Ejemplo: si el transformador del ejemplo anterior es de *FS* = 4, la intensidad por el contador conectado a su secundario no subiría mucho por encima de 5 (A) \times 4 = 20 A ya que el núcleo del transformador magnéticamente saturado lo priva de su comportamiento lineal, y más intensidad por el primario ya no significa más intensidad por el secundario al ritmo anterior a la saturación. Un contador habitual que soporta 80 A por su interior no correría ningún peligro.

En el caso de los transformadores de intensidad para *protección* las dos cifras que acompañan a 'Clase' indican el *factor límite de precisión (FLP, o accuracy limit factor ALF en inglés)*: de nuevo la cifra antes de la *P* indica en tantos por ciento el error que puede afectar a la relación de transformación mientras que la intensidad primaria no supere la intensidad primaria nominal el número de veces indicado por la segunda cifra.

Ejemplo: un transformador para protección de clase 5P10 mantiene el error de relación en $\pm 5\%$ hasta 10 veces la intensidad nominal del primario. Si se trata de un 100:5 - 5P10 que tiene que medir un cortocircuito de 725 A, cabe esperar en su secundario una intensidad de

$$I_s = \frac{725}{\frac{100}{5} \pm \frac{5}{100}} = 36.25 \pm 0.091 \text{ A}$$

ya que $725 < 10 \times 100$ y el transformador se mantiene en su zona de precisión. Para intensidades de primario superiores a $10 \times 100 = 1000$ A los valores de secundario sobrepasarán los 50 A pero el núcleo se habrá saturado y el crecimiento ya no será lineal, sino muy poco más. Si el relé de protección que lee esta intensidad secundaria soporta 80 A no correrá ningún peligro.

Los transformadores de intensidad mantienen su precisión dentro de la tolerancia de la norma siempre que la caída de tensión interna no sea excesiva. Esta caída de tensión depende de la construcción del transformador y de la intensidad demandada por el circuito de medida, que debe estar, por tanto, dentro de ciertos límites.

Las normas piden a los fabricantes que indiquen cuál es la potencia aparente máxima (en VA) de la carga que pueden alimentar estos transformadores, que depende, a su vez, de:

- La impedancia interna del circuito interno en los contadores o relés conectados a los secundarios de los transformadores (ver tabla).
- La longitud y sección de los cables de conexión entre los transformadores y los contadores o relés (Fig. 15). Del documento de Iberdrola MT 2.80.14 (pág. 12) se puede deducir la siguiente regla práctica para calcular la potencia aparente de cada par de cables conectado a un secundario de 5 A de intensidad nominal en función de su longitud L (m) y su sección s (mm²):

$$S_{cables}(VA) = 0.8803 \frac{L(m)}{s(mm^2)}$$

para secundarios a 5 A

Aparato	VA a ln.
Amperímetros	
Indicadores	0,25 a 2
Registradores	1,5 a 9
Contadores	0,5 a 3
Vatímetros	
Indicadores	1 a 3
Registradores	1,5 a 8
Fasímetros	
Indicadores	2 a 6
Registradores	6 a 12
Maxímetros	3
Convertidores de potencia	3 a 6
Relés	
de sobreintensidad, de tiempo inver.	5 a 8
de sobreintensidad, temporizados	1 a 5
de sobreintensidad, instantáneos	1 a 10
direccionales	1,5 a 10
de potencia, temporizados	1,5 a 3
diferenciales	3 a 12
de distancia	6 a 20
Reguladores	10 a 150

Potencia de las bobinas amperimétricas usuales.
Fuente: ARTECHE.

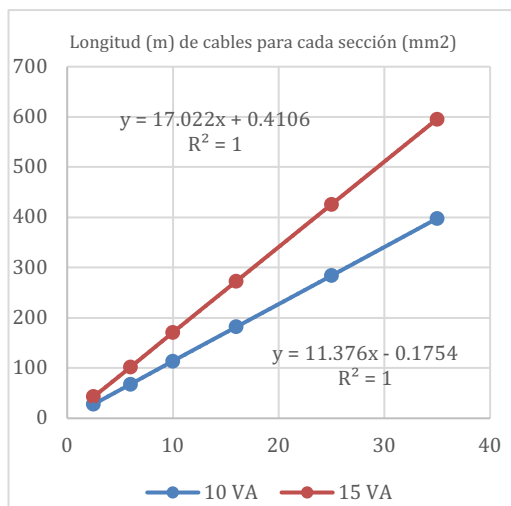


Fig. 14 Longitudes de cables que agotan la potencia suministrada por un transformador de 10 ó 15 VA según su sección.

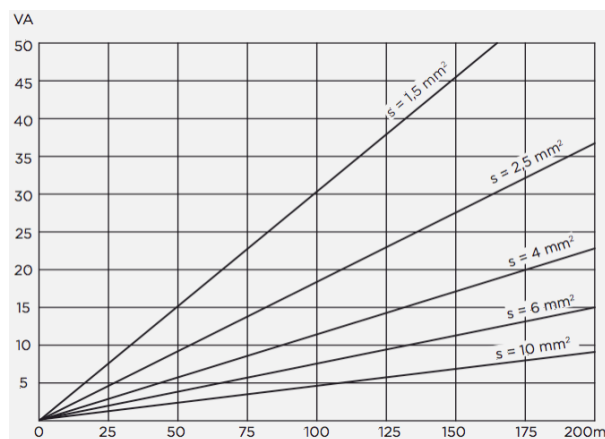


Fig. 15. Potencia aparente de los cables de conexión usuales. Fuente: ARTECHE



Las potencias aparentes nominales de un transformador de medida suelen oscilar entre 5 VA y 50 VA por secundario, pero los usuales se fabrican de 10 ó 15 VA y pueden pedirse de otros valores para cada necesidad particular.

Las relaciones de transformación usuales para los transformadores de intensidad suelen ser múltiplos de la intensidad secundaria normalizada, que es de 5 A (preferible) ó 1 A (cuando hay grandes distancias entre los transformadores y los receptores). Los valores nominales primarios son los de esta tabla, más sus múltiplos en potencias de 10, y se subrayan los valores preferentes:

<u>10</u>	12.5	<u>15</u>	<u>20</u>	25
<u>30</u>	40	<u>50</u>	60	<u>75</u>

En la Fig. 12 se indica al instalador que utilice la relación de transformación subrayada (50) por lo que el transformador quedará configurado con la relación 50:5 para el primer secundario y también 50:5 para el segundo secundario.

Por último, los puntos indicados como 'P1' y 'P2' sirven para indicar al instalador la *posición de montaje* de cada transformador en relación con la línea cuya intensidad se pretende medir o conocer: deberá conseguir que el transformador esté conectado de manera que la potencia de la red entre por el lado marcado con 'P1' y salga por el marcado con 'P2'.

En las posiciones 11 a 15 del plano de la Fig. 12 se representa un conjunto de tres transformadores de tensión monofásicos de triple secundario cada uno, conectados para configurar un conjunto trifásico de transformadores de tensión.

Las relaciones de transformación de los transformadores de tensión pueden ser cualesquiera, dentro de las normalizadas (tabla de la derecha, norma IEC 60038).

Tensiones nominales de aislamiento kV	Tensiones primarias asignadas V
12	11.000
17,5	13.200 - 16.500
24	22.000
36	27.500 - 33.000
52	44.000
72,5	55.000 - 66.000
123	110.000
145	132.000
245	220.000
420	380.000 - 400.000
550	500.000

Pero se indican de una forma curiosa, para dar información de cómo conectarlos. Así, un transformador monofásico que indica

$$44000/\sqrt{3} : 110/\sqrt{3}$$

tiene un solo secundario y una relación de transformación de valor

$$m = \frac{44000/\sqrt{3}}{110/\sqrt{3}} = \frac{44000}{110} = 400$$

pero está diseñado para una tensión nominal de primario de $44000/\sqrt{3} = 25.4$ kV, que es la propia de una red de 44 kV (45 kV suele ser lo usual, y esta pequeña diferencia no es ningún problema). Viene preparado, por tanto, para conectarlo entre fase y neutro y proporcionar la medida de la tensión simple, no la compuesta. La tensión

nominal del secundario será $25.4 \text{ kV} / 400 = 63.5 \text{ V}$.

Sin embargo, si se indica

$$44000/\sqrt{3} : 110/3$$

se alude también a un transformador diseñado para conectarse a una red de 44 kV (en España será de 45 kV, cuya tensión nominal simple será de 25.4 kV), pero ahora la relación de transformación es

$$m = \frac{44000/\sqrt{3}}{110/3} = \frac{25403}{36.7} = 692.82$$

Significa que cuando está sometido a los 25.4 kV en el primario, ofrece 36.7 V en el secundario.

De nuevo los símbolos 'P1' y 'P2' del plano indicarán al instalador cómo conectar el primario de cada transformador (bornes 'P1' a la línea, bornes 'P2' entre sí y a tierra en este caso).

El número "Cl" indica de nuevo la *clase de precisión* de la medida, que ofrecerá siempre que no se le sature, es decir, que no se sobrepase la carga aplicada en el secundario, cuyo valor máximo también se indica seguido de las unidades VA.

Las clases de precisión son las de la tabla de la derecha para los *transformadores de tensión* (UNE-EN IEC 61869-11:2019):

Precisión nominal	Transformadores de tensión pasivos de baja potencia para...
Clase 0.1	Medida en laboratorios
Clase 0.2	Medida para facturación de generación y demanda
Clase 0.5	
Clase 1	Medida para análisis de redes
Clase 3	Medidas aproximadas
0.1P	Uso polivalente, de protección en combinación con relés, y medida
0.2P	
0.5P	
1P	

Suelen construirse transformadores de tensión con dos o más devanados secundarios, y en el ejemplo de la Fig. 12, donde cada transformador monofásico tiene tres secundarios, se utilizará un secundario para medida (facturación de energía tras multiplicar sus tensiones por las intensidades medidas con los correspondientes transformadores de intensidad de las posiciones 7 a 10), otro secundario para protección (se conectará a las entradas de tensión de los relés), y un tercero para reducir el riesgo de destrucción del transformador por efecto de la ferorresonancia ⁽²⁾ o para limitar las pérdidas de precisión en los otros devanados:

- En el ejemplo de la Fig. 12 se ve la conexión anti-resonancia: la resistencia, de una potencia similar a la nominal de los transformadores, no se ha dibujado, pero se instalará cerrando el circuito entre las bornas '5' y '6' del 'cuadro de control'. Pretende que no sea resonante el circuito *RLC* formado por los secundarios de los tres transformadores (inductivos, *L*) y sus puestas a tierra (capacitivas, *C*), lo que se daría en caso de tensiones de red desequilibradas (falta

² FERRACCI, Philipp, *La ferorresonancia*, Schneider Electric - Cuaderno Técnico nº 190, octubre 1997 (ed. en español de octubre 2000).

de una fase por ejemplo). La resonancia puede dar lugar a tensiones muy elevadas que dañarían el aislamiento del material y destruirían los aparatos.

- Para asegurar la precisión de la medida se pueden conectar resistencias en paralelo con el juego de voltímetros de medida (ver Fig. 16), que cargarán el devanado secundario correspondiente con aproximadamente el 50% de su potencia nominal y, como mínimo, siempre mayor del 25% para cualquier tensión de trabajo posible. Así se asegura que el transformador está trabajando siempre en su zona lineal donde la clase de precisión está garantizada.

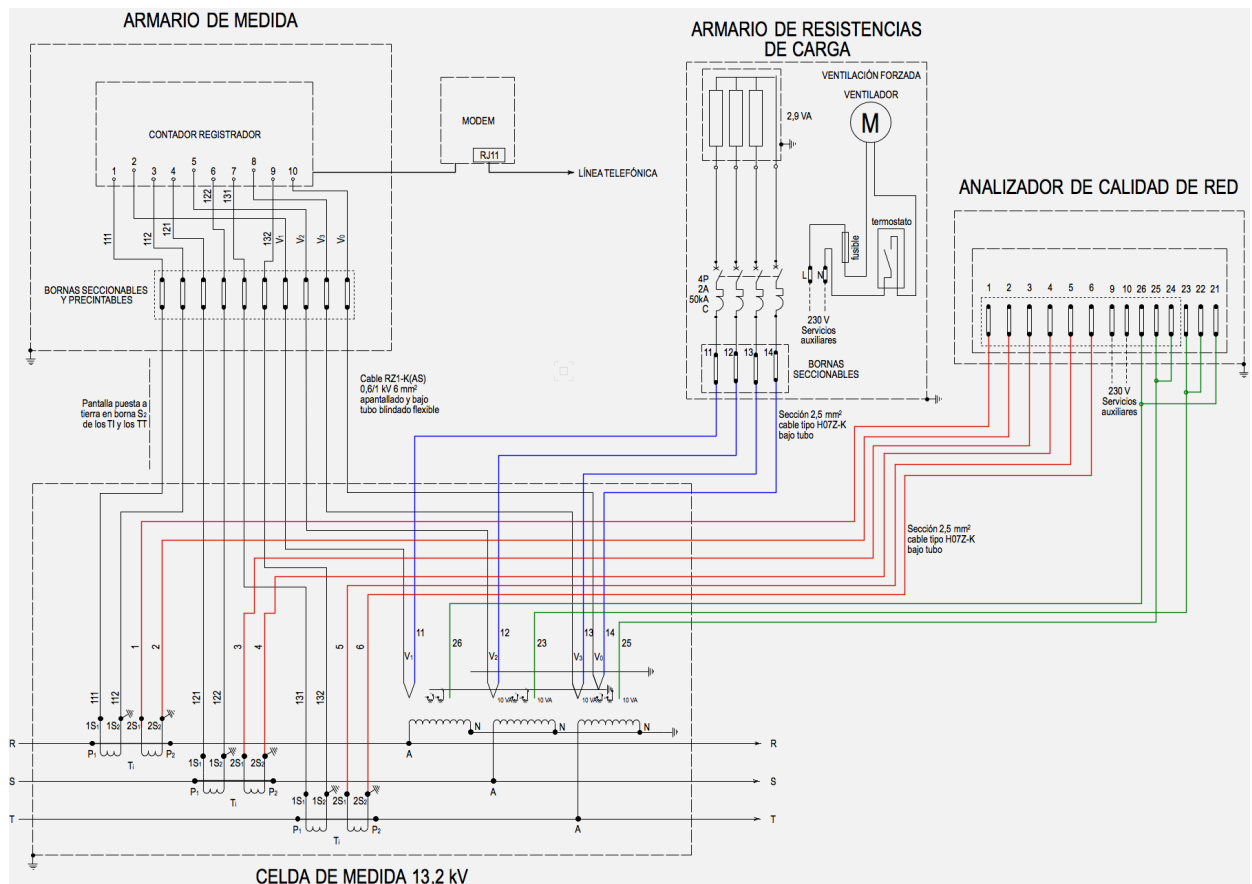


Fig. 16. Instalación completa de contador, analizador de red y resistencia de carga para los transformadores de tensión.

Estas resistencias se disponen en una caja que puede requerir un disipador de calor e incluso un termostato que acciona un pequeño ventilador. Lo normal es que esta caja se conecte directamente al mismo devanado que se usa para la medida de facturación, pero a través de una manguera de cables independiente, para no introducir caída de tensión en el cable del equipo de medida. Llevará también protección fusible o magnetotérmica particular.

EJEMPLO:

Se necesita calcular el valor de las resistencias de carga a añadir a los secundarios de tres transformadores de tensión de 10 VA cada uno, tensiones $13.2/\sqrt{3} : 110/\sqrt{3}$, para asegurar que siempre soportarán una carga de al menos el 25% de su potencia nominal.

El esquema del circuito es como el de la Fig. 17.

La tensión V es la tensión simple. Como puede fluctuar en $\pm 7\%$ de la tensión nominal según la regulación vigente, se tiene que

$$\frac{110}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{7}{100}\right) \leq V \leq \frac{110}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{7}{100}\right)$$

$$59.06 \leq V \leq 67.95$$

con $V_n = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63.51 \text{ V}$

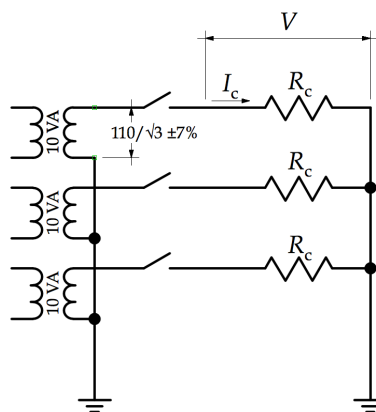


Fig. 17. Resistencias de carga en el secundario de los transformadores de tensión.

Cada resistencia estará sometida a esa tensión simple. Su potencia será entonces:

$$P_{R_c} = \frac{V^2}{R_c}$$

Como esa potencia debe ser de al menos el 25% de la potencia nominal de los transformadores de medida, su valor debe ser:

$$R_c \leq \frac{V^2}{P_{R_c}} \leq \frac{V^2}{25/100 S_{n \text{ trafa}}}$$

La tabla siguiente resuelve la ecuación anterior para los tres valores de la tensión señalados más arriba (el nominal y los dos extremos $\pm 7\%$). Se comprueba que un valor de 1400Ω es suficiente para garantizar la carga de al menos el 25% de la potencia nominal de cada transformador de medida en el caso más desfavorable, que es el de menor tensión:

$R_c (\Omega)$	1400		
V	$110/\sqrt{3} - 7\%$	$110/\sqrt{3}$	$110/\sqrt{3} + 7\%$
(V)	59.06	63.51	67.95
$P_{R_c} (W)$	2.5	2.9	3.3
$S_{n \text{ trafa}} (VA)$	10		
% $S_{n \text{ trafa}}$	25%	29%	33%
$I_c (mA)$	42	45	49

Para disipar apenas 3 W por fase (hasta 10 W en total) no será necesario añadir ventilador ni termostato a la caja con las resistencias.

NOTAS DE SEGURIDAD:

Los transformadores de intensidad se construyen para conectarse en serie con las bobinas amperimétricas de los aparatos de medida, que tienen muy baja impedancia. Por ello los transformadores de intensidad trabajan prácticamente en cortocircuito y



se diseñan para bajas inducciones magnéticas en el núcleo. Si el secundario se dejara abierto, y no produjera fuerza magnetomotriz que contrarreste la creada por la corriente del primario, el flujo magnético saturaría rápidamente el núcleo y crecería después sin control, elevando muchísimo la tensión del secundario y creando enormes pérdidas en el hierro. El calor generado podría causar la explosión del transformador.

Por ello, los terminales secundarios de los transformadores de intensidad NUNCA deben dejarse sin conectar a su carga, y cuando ello no sea posible, deberán cortocircuitarse.

Los transformadores de tensión pueden considerarse como los duales de los anteriores, de forma que se diseñan para altas inducciones, la intensidad primaria es muy pequeña y nunca los satura, pero hay que controlar la secundaria.

Por ello, los terminales secundarios de los transformadores de tensión pueden dejarse a circuito abierto o conectarse a cargas pequeñas, pero NUNCA deben cortocircuitarse.

Un documento muy completo sobre transformadores de medida es la PUBLICACIÓN TÉCNICA SCHNEIDER PT-071 *Protecciones eléctricas en MT* del ing. Robert Capella, mayo 2003.

3.3 Completitud y exactitud de las lecturas

Todos los multímetros, más el procedimiento de lectura de las medidas tomadas por ellos, forman un complejo sistema de adquisición de datos (SCDA, *Supervisory Control And Data Acquisition*) del que depende la exactitud del despacho tanto económico como eléctrico. Debe tenerse en cuenta que cualquier error de despacho económico genera importantes perjuicios económicos a los agentes del mercado eléctrico, pero un error de despacho eléctrico puede ocasionar la actuación de las protecciones automáticas que dejen sin suministro a grandes zonas del territorio o a todo el país entero.

La completitud y exactitud del conjunto de medidas adquiridas es, por tanto, crucial para el buen funcionamiento de un sistema eléctrico de potencia. Para lograr ambas a un tiempo se adoptan las siguientes precauciones:

- REDUNDANCIA DE MEDIDAS: se miden las mismas magnitudes en sitios muy cercanos que normalmente constituyen el mismo punto eléctrico, pero mediante instrumentos distintos. Los datos de ambos se comparan para obtener una única medida segura (completitud) y descartar errores (exactitud).
- EXCESO DE VARIABLES MEDIDAS: según la Teoría de circuitos, fijadas todas las intensidades menos una de un receptor, por ejemplo, queda determinada la que falta por simple aplicación de la primera ley de KIRCHHOFF. Si esta intensidad también se midiera, se obtiene una lectura extra que poder comparar con su valor calculado, para estar así seguros de disponer de todas las medidas (completitud) y detectar inconsistencias entre lecturas (exactitud).

Es frecuente encontrar en la bibliografía el término *grados de libertad* para denominar al exceso de datos disponibles frente al de datos necesarios para calcular algún valor. Así, en el ejemplo anterior, hay un dato más del estrictamente necesario, con lo que el grado de libertad del sistema de cálculo es uno. Más adelante veremos que en un sistema de potencia es frecuente trabajar grados de libertad muy grandes.

- TRATAMIENTO MATEMÁTICO DE LAS LECTURAS OBTENIDAS: mediante técnicas habituales de la Estadística se pueden detectar errores entre las medidas (exactitud) que permiten dar por bueno o desechar algún valor.

4 TRATAMIENTO DE LECTURAS DE MEDIDAS ELÉCTRICAS

4.1 Errores en las medidas

Tradicionalmente los errores se dividen en sistemáticos y accidentales. Los *sistemáticos* son propios de los instrumentos y métodos de medida, y resultan por ello difícilmente evitables. Por el contrario, los *accidentales* se deben a las circunstancias de la medida, y pueden reducirse aumentando la minuciosidad o cambiando los procedimientos.

En medidas eléctricas se tiene, entre los errores sistemáticos, a los errores de calibración y a los propios del método de medida; y entre los accidentales, los errores de lectura y los errores de tratamiento de valores:

- ERRORES DE CALIBRACIÓN: los valores "reales" de las magnitudes físicas a medir nunca son conocidos. Medir es comparar con un patrón. Si el patrón siempre está disponible, la comparación es tanto más exacta cuanto más precisa sea la determinación de la diferencia con el patrón. Pero lo normal es que el patrón no esté disponible y el instrumento deba "recordarlo". Esto significa que el instrumento debe estar calibrado para ofrecer comparaciones continuas con el patrón sin que éste se halle físicamente disponible. Los defectos de calibración son fuente muy frecuente de error en la medida, pero es un error constante que se descarta automáticamente si lo que se mide son variaciones de la magnitud, diferencias en la magnitud. Si se trata de medir valores absolutos, este error es terriblemente perjudicial.
- ERRORES INHERENTES A TODO MÉTODO DE MEDIDA: en una medida real influyen multitud de parámetros, a menudo variables, como la temperatura o la humedad del ambiente, el grado de envejecimiento del aparato o la presencia de polvo y contaminantes, por ejemplo. Estos errores son también frecuentes y más difíciles de detectar porque, a menudo, son muy sutiles, variables, y producen alteraciones progresivas que no causan la alarma del sistema verificador de datos. Requieren un minucioso examen cualitativo que identifique el error por comparación con datos correlativos en el espacio o en el tiempo.
- ERRORES DERIVADOS DE LA LECTURA DE LA MEDIDA: tratándose de medidas obtenidas por un observador humano, hablaríamos de impericia, cansancio, distracción, etc. Como en el caso de sistemas eléctricos las medidas se toman de manera automática, hablamos entonces de fallos de señal, fallos de conversión o fallos de comunicación de los valores obtenidos. Estos errores son poco frecuentes y más fáciles de detectar, porque resultan evidentes tras un análisis meramente cuantitativo.
- ERRORES DERIVADOS DEL REGISTRO Y TRATAMIENTO DE VALORES: se trata de errores muy raros e infrecuentes derivados del pre-tratamiento de los datos, normalmente de carácter informático, y que puede venir causado por el mal funcionamiento de algún aparato o la no idoneidad de algún algoritmo.

4.2 El problema de la estimación de los valores correctos

La inevitable presencia de errores hace necesario emplear algún método que permita estimar esos errores para rechazar los valores que superen los umbrales aceptables, y eliminar después las desviaciones para llegar a unos resultados que reduzcan los errores al mínimo. Esos valores no serán los correspondientes a las magnitudes *reales*, si es que ese término puede aplicarse con rigor, pero sí serán tan buenos como sea posible en función de los datos disponibles. Se llamarán valores *estimados*, y se darán por buenos si objetivamente se concluye que constituyen el mejor valor posible según los datos disponibles.

Para ajustar los valores medidos y obtener el mejor valor estimado se pueden emplear varios métodos, como se verá en la sección siguiente. Por ahora vamos a poner de manifiesto en qué consiste el problema mediante un ejemplo.

Supongamos un circuito como el de la fig. 16. Es un cuadripolo como los que se suelen emplear para describir los componentes de los sistemas eléctricos de potencia. Tiene una configuración interna cualquiera, en este caso compuesta por 5 ramas de impedancias z_1 a z_5 de valor suficientemente conocido y fijo. Como es habitual en el análisis de sistemas, resulta necesario conocer las tensiones v_1 y v_2 en sus terminales, que son las fronteras en las que se conectan otros dos cuadripolos componentes del sistema, uno a cada lado. Como veremos, las tensiones en esos puntos de unión entre componentes son las que se calculan para determinar el estado del sistema en unas determinadas condiciones de funcionamiento, y se llaman por eso variables de estado. A partir de ellas se obtienen el resto de parámetros de la red, con lo que ésta quedará resuelta.

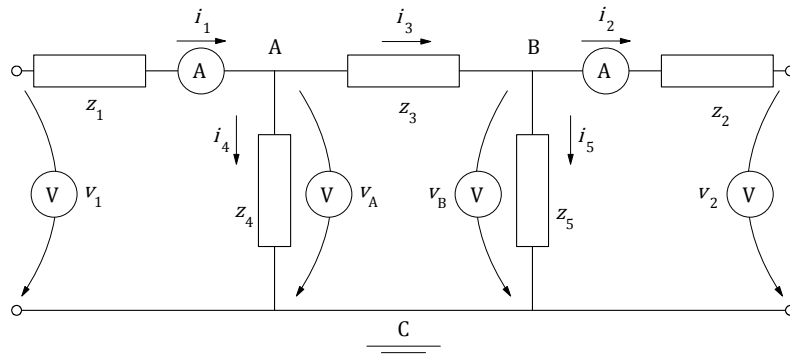


Fig. 18 Circuito simple donde dos amperímetros miden las intensidades i_1 e i_2 , y los cuatro voltímetros las tensiones v_1 , v_2 , v_A y v_B . Se quiere conocer a partir de ellas las tensiones de estado v_1 y v_2 .

En análisis de sistemas es habitual utilizar el método de los nudos, porque las ecuaciones que proporciona permiten calcular directamente las variables de estado, que son tensiones. Dado que estamos ante una red de Kirchhoff de tres nudos, para describirla perfectamente tan solo necesitamos dos ecuaciones linealmente independientes, tantas como nudos menos uno. Como se sabe, el método de los nudos da inmediatamente dos ecuaciones para expresar el valor de v_1 y v_2 en función de las tensiones de los demás nudos de la red, v_A y v_B , luego midiendo esas dos tensiones se pueden calcular las variables de estado:

Nota: Identificaremos en adelante los valores *medidos* por medio de una coma superior, para distinguirlos de los valores *calculados*, que no la llevan.

Valores Medidos		Valores Calculados		Valores Medidos	
v'_A	248.0 V	v_1	1002.25 V	v'_1	999.3 V
v'_B	227.5 V	v_2	899.75 V	v'_2	901.0 V

También se pueden calcular las tensiones de estado v_1 y v_2 a partir de las lecturas de un amperímetro y de un voltímetro cualesquiera, o dos amperímetros, utilizando las ecuaciones apropiadas [son las ecuaciones (1.2) indicadas más adelante], con lo que se amplía el grupo de posibles resultados. La tabla los resume todos:

Valores Medidos		Valores Calculados		Valores Medidos
v'_A	248.0 V	v_1	1002.25 V	
v'_B	227.5 V	v_2	899.75 V	
i'_1	250.0 A	v_1	996.94 V	
i'_2	-225.5 A	v_2	905.06 V	
i'_1	250.0 A	v_1	996.79 V	
v'_B	227.5 V	v_2	900.36 V	$v'_1 = 999.3 V$
v'_A	248.0 V	v_1	1001.64 V	$v'_2 = 901.0 V$
i'_2	-225.5 A	v_2	905.21 V	
v'_A	248.0 V	v_1	998.00 V	
i'_1	250.0 A	v_2	938.00 V	
v'_B	227.5 V	v_1	964.00 V	
i'_2	-225.5 A	v_2	904.00 V	

La cuestión es decidir ahora cuáles son los resultados 'verdaderos', es decir, cuáles son los valores 'verdaderos' de v_1 y v_2 , pues bien se ve que todos los de la tabla anterior son posibles valores 'buenos', en el sentido de que todos ellos tienen una justificación basada en las medidas obtenidas más los cálculos realizados. Y además contamos con los valores medidos directamente (v'_1 y v'_2), que no podemos ignorar. Cabría esperar que todos esos valores de v_1 y v_2 coincidieran, pero la realidad es que nunca lo hacen por la presencia de los errores.

Así pues, para obtener los mejores valores posibles de v_1 y v_2 se deberían considerar de una manera u otra todos los de la tabla siguiente:

	v_1	v_2
	1002.25 V	899.75 V
	996.94 V	905.06 V
Valores calculados a partir de las medidas indirectas	996.79 V	900.36 V
	1001.64 V	905.21 V
	998.00 V	938.00 V
	964.00 V	904.00 V
	v'_1	v'_2
Valores directamente medidos	999.30 V	901.00 V

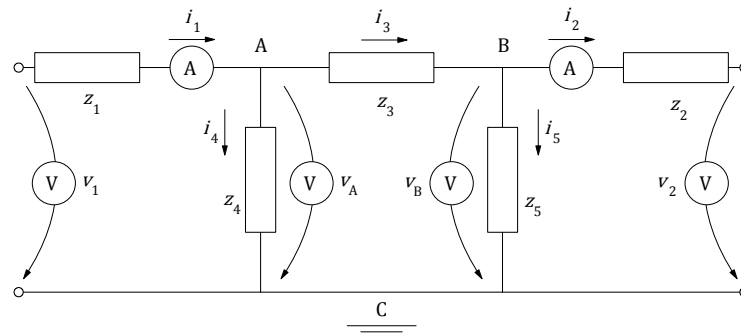
Parece que las tensiones v_1 y v_2 valen en torno a 1000 V y 900 V respectivamente, pero ¿cuál

es el mejor valor posible que podemos adoptar?

El método que vamos a seguir para determinar esas variables de estado v_1 y v_2 requiere obtener las *ecuaciones de las mediciones*:

Las ecuaciones de las mediciones expresan la medida de los instrumentos (amperímetros o voltímetros) instalados en la red a partir de los valores que se tomen por buenos de las variables de estado.

Vamos a deducir las ecuaciones de las mediciones para la red de la fig. 16, en la que se representan cuatro voltímetros: dos miden las tensiones de estado v_1 y v_2 y dos las tensiones entre los dos nudos interiores de la red y el de referencia, v_A y v_B . También se han incluido dos de los ocho amperímetros que podrían colocarse, los que miden las intensidades i_A e i_B . Se disponen, por tanto, de los valores de las impedancias z_1 a z_5 , del modelo que da la descripción topográfica de la red, y de seis lecturas de aparatos diferentes.



La Fig. 18 otra vez.

Si se aplica la primera ley de KIRCHHOFF a cada nudo (A y B) excepto al de referencia (C) en la forma *suma de las intensidades que salen igual a cero*, se obtiene

$$\begin{aligned} -i_1 + i_3 + i_4 &= 0 \\ -i_3 + i_5 + i_2 &= 0 \end{aligned}$$

Poniendo las intensidades de las ramas como producto de la admitancia de la rama y por diferencia de potencial entre sus extremos, las expresiones anteriores se transforman en

$$\begin{aligned} y_1(v_A - v_1) + y_3(v_A - v_B) + y_4 v_A &= 0 \\ y_3(v_B - v_A) + y_5 v_B + y_2(v_B - v_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde

$$\begin{aligned} i_1 &= -y_1(v_A - v_1) \\ i_2 &= y_2(v_B - v_2) \end{aligned}$$

Se puede resolver el anterior sistema para despejar los valores medidos por los instrumentos y dejarlos en función de las incógnitas. Supongamos que los valores de las impedancias son los siguientes

$$z_1 = 3 \Omega \quad z_2 = 3 \Omega \quad z_3 = 6 \Omega \quad z_4 = 1 \Omega \quad z_5 = 1 \Omega$$

Despejando y calculando se obtienen las primeras *ecuaciones de las mediciones*:

$$\begin{aligned}
v_A &= \frac{9}{40} v_1 + \frac{1}{40} v_2 \\
v_B &= \frac{1}{40} v_1 + \frac{9}{40} v_2 \\
i_1 &= \frac{31}{120} v_1 - \frac{1}{120} v_2 \\
i_2 &= \frac{1}{120} v_1 - \frac{31}{120} v_2
\end{aligned} \tag{1.2}$$

que hay que completar con las correspondientes a los voltímetros v_1 y v_2 así:

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1 v_1 + 0 v_2 \\
v_2 &= 0 v_1 + 1 v_2
\end{aligned}$$

Como hay cuatro voltímetros y dos amperímetros instalados en el interior de la red, se obtienen seis ecuaciones de las mediciones. Esas ecuaciones de las mediciones son las que expresan, en función de las variables de estado v_1 y v_2 , los valores que arrojarían esos seis aparatos, esto es, los valores de v_A , v_B , i_1 , i_2 , v_1 y v_2 a partir de cualesquiera valores de v_1 y v_2 .

Se busca encontrar qué valores concretos de v_1 y v_2 hacen coincidir los deducidos de las ecuaciones de las mediciones con los realmente medidos por esos aparatos. Esos valores concretos, que logran la mejor aproximación a los medidos, serán los que llamaremos *mejores valores* de las variables de estado v_1 y v_2 .

4.3 Solución mediante el método de los mínimos cuadrados

El método de estimación del mejor valor, conocido como de los mínimos cuadrados, consiste en calcular el cuadrado de la diferencia entre cada valor disponible y el posible mejor valor estimado, y hacer que la suma de todas esas diferencias sea mínima.

A continuación vamos a aplicar este método a las lecturas de los aparatos.

Aceptamos como inevitable la presencia de errores en los datos obtenidos. Por tanto, la expresión que realmente corresponde a cada valor medido es la de su ecuación de mediciones más el error que le afecte,

$$\begin{aligned}
v'_A &= \frac{9}{40} v_1 + \frac{1}{40} v_2 + e_{vA} \\
v'_B &= \frac{1}{40} v_1 + \frac{9}{40} v_2 + e_{vB} \\
i'_1 &= \frac{31}{120} v_1 - \frac{1}{120} v_2 + e_{i1} \\
i'_2 &= \frac{1}{120} v_1 - \frac{31}{120} v_2 + e_{i2} \\
v'_1 &= v_1 + e_{v1} \\
v'_2 &= v_2 + e_{v2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

donde los términos añadidos e_{vA} , e_{vB} , e_{i1} y e_{i2} son los errores inherentes a las mediciones correspondientes. Estos errores siguen generalmente un patrón estadístico, de lo que trataremos luego. Si despejamos su valor tenemos



$$\begin{aligned}
 e_{vA} &= v'_A - \left(\frac{9}{40}v_1 + \frac{1}{40}v_2\right) \\
 e_{vB} &= v'_B - \left(\frac{1}{40}v_1 + \frac{9}{40}v_2\right) \\
 e_{i1} &= i'_1 - \left(\frac{31}{120}v_1 - \frac{1}{120}v_2\right) \\
 e_{i2} &= i'_2 - \left(\frac{1}{120}v_1 - \frac{31}{120}v_2\right) \\
 e_{v1} &= v'_1 - v_1 \\
 e_{v2} &= v'_2 - v_2
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Las expresiones de la derecha, que dependen de los valores que se estimen para las tensiones de estado v_1 y v_2 , son las medidas teóricas o estimadas. Los errores son, por tanto, la diferencia entre las medidas realmente tomadas, que indicamos con un apóstrofe, y las medidas estimadas, es decir, aquellas que teóricamente se habrían obtenido para un cierto valor de v_1 y v_2 , y que dependen de la configuración y parámetros de la red.

Ahora se busca ajustar los valores de v_1 y v_2 de manera que los errores e sean mínimos. No se trabaja directamente con los valores obtenidos de dichos errores, pues los valores positivos y negativos tienden a compensarse unos a otros. Se utilizan sus cuadrados y se procura que la suma de todos ellos sea mínima.

Así, para el ajuste se considera la función objetivo f , suma de los cuadrados de los errores de las lecturas utilizadas, que es de la forma

$$f = \sum e_j^2 = e_{vA}^2 + e_{vB}^2 + e_{i1}^2 + e_{i2}^2 + e_{v1}^2 + e_{v2}^2 \tag{1.5}$$

Se buscará que f valga lo menos posible. La tabla siguiente muestra una manera de organizar los datos y el resultado que se obtiene iterando con Solver de Excel:

	Valores estimados	v_1 v_2	Medidas estimadas	Errores	
				e	e^2
		999.3 V 901.2 V			
		v'_A 248.0 V	247.365	0.634884	0.403078
		v'_B 227.5 V	227.757	-0.257097	0.066099
Medidas		i'_1 250.0 A	250.633	-0.633119	0.400840
		i'_2 -225.5 A	-224.489	-1.010906	1.021931
		v'_1 999.3 V	999.3	0.035526	0.001262
		v'_2 901.0 V	901.2	-0.224380	0.050346
				$f =$	1.943556

Puesto que los cuadrados de los errores son siempre números positivos, su suma total, es decir, la función f , es siempre mayor o igual que cero, luego tiene un mínimo. Si además el conjunto de medidas de que se parte es razonablemente bueno, ese mínimo será próximo a cero. Los valores de v_1 y v_2 que hagan que f adopte ese valor mínimo se tomarán como *mejores valores* y se dirá que las variables de estado v_1 y v_2 valen eso.

Nota:

En el ejemplo se comprueba que esos valores que se tomarán como *mejores valores* no coinciden exactamente con los valores medidos por aparatos, voltímetros en este caso, que registran esos mismos valores. Esto es consecuencia de que este método define como *mejores valores* los resultantes de aplicar el método de los mínimos cuadrados como se ha mostrado. Es decir, no son *mejores valores* los que miden los aparatos que registran directamente el valor de las variables de estado, y sí lo son los valores calculados con el método que se ha mostrado.

Este método así aplicado presenta tres tipos de problemas:

- a) Ignora que los aparatos pueden tener distintas *precisiones de medida*: los aparatos más precisos deberían influir más en la determinación de las variables de estado buscadas.
- b) Se trabaja con una *mezcla de errores absolutos*: se mezclan magnitudes de valores normalmente grandes (voltios) con magnitudes de valores más pequeños (amperios) pero los errores no tienen en cuenta este hecho. Así, un error de 10 unidades en una tensión de 1000 V es un error relativamente pequeño (un 1%) mientras que el mismo error de 10 unidades en una medida de 100 A es un error relativamente grande (10%).
- c) *Factor de escala*: si en lugar de trabajar con voltios y amperios se consideran kV y kA el valor de f resulta 10^6 veces menor, lo que obliga a ajustar los métodos estadísticos de verificación de errores que veremos en el capítulo siguiente.

El método evita los tres problemas anteriores si se trabaja con errores relativos y se consideran las precisiones de los aparatos. Lo vemos a continuación.

4.4 Errores relativos y precisión de los aparatos

Supongamos que todos los aparatos tienen una *precisión* de un 1.00 %...

Que un aparato tenga una precisión de $\pm 1.00\%$ significa que si lo usáramos para medir la misma magnitud muchas veces de forma idéntica, y calculáramos después el valor medio (promedio) de todas esas medidas, el 68.26 % de ellas habrán estado alejadas de esa media menos de un $\pm 1.00\%$ del valor de dicha media. Esto ocurre porque la *precisión* de un aparato es la *desviación estándar* de sus medidas:

- Los errores que afectan a esa medida siguen la *distribución normal* en forma de campana de Gauss, ya que son aleatorios (pueden ser errores tanto por defecto como por exceso respecto de la media).
- El 1.00 %, la precisión, es el valor de la *desviación estándar* de las medidas que produce ese aparato respecto de la media de sus medidas.

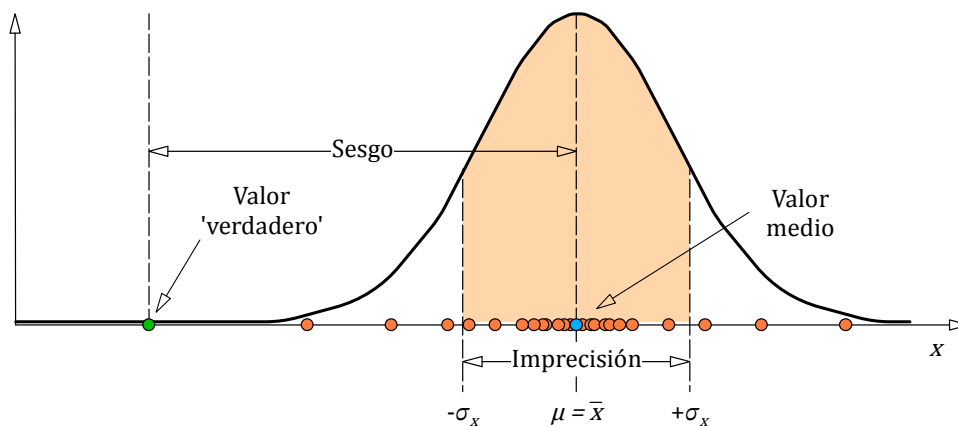


Fig. 19 Distribución normal de los valores de una medida reiterada con errores aleatorios y de sesgo. El 68.26% de las medidas estará dentro de la zona sombreada.

- Por tanto, la desviación de un 1.00 % respecto de la media es lo estándar, y esta cualidad la cumplen el 68.26 % de los valores en una distribución normal porque ese es el valor que arroja la forma de la campana de Gauss.

En la fig. 17 se pueden ver representados todos los conceptos anteriores, con alguna nomenclatura usual más, siguiendo el estándar internacional ISO 5725-1 (UNE 82009-1):

- La *precisión* se refiere al grado de concordancia existente entre los resultados de ensayo (medidas) obtenidos.
- La precisión también se llama *incertidumbre* de las medidas, porque cuanto mayor es numéricamente la precisión menor es la seguridad de haber obtenido una medida próxima al valor 'verdadero'. Recuerde esto para no caer en el error de creer que un sensor con un $\pm 5\%$ de precisión es de mayor calidad que uno de $\pm 1\%$, pues es justamente al revés. Piense en términos de *incertidumbre* o *imprecisión* para no fallar: los aparatos se calibran indicando su \pm imprecisión(%).
- El valor *esperado* es el que suele determinarse como 'correcto', y corresponde a la media (promedio) de todas las medidas obtenidas con el mismo aparato midiendo lo mismo muchas veces.
- Desgraciadamente la presencia de un error sistemático introduce un *sesgo* que alejará el valor 'verdadero' del que consideraremos 'correcto'. El error sistemático es un error constante, no aleatorio, inherente al aparato.
- Ese sesgo o error permanente alejará el valor esperado del 'verdadero', arruinando la *exactitud* o *veracidad* de las medidas.
- Un aparato viciado por un error constante podrá producir medidas muy próximas unas de otras, medidas muy precisas, con poca imprecisión. Por lo primero tendrá una veracidad muy mala, pero por lo segundo tendrá una precisión muy elevada (una imprecisión muy pequeña). En la fig. 18 se pueden ver otras combinaciones.
- No hay que confundir precisión con resolución: la precisión indica cuán próximas, cuán coherentes entre sí, suelen ser las lecturas de un aparato midiendo reiteradamente la misma magnitud; la *resolución* es el menor cambio de esa magnitud que el aparato puede detectar (el número de decimales significativos en su medida).

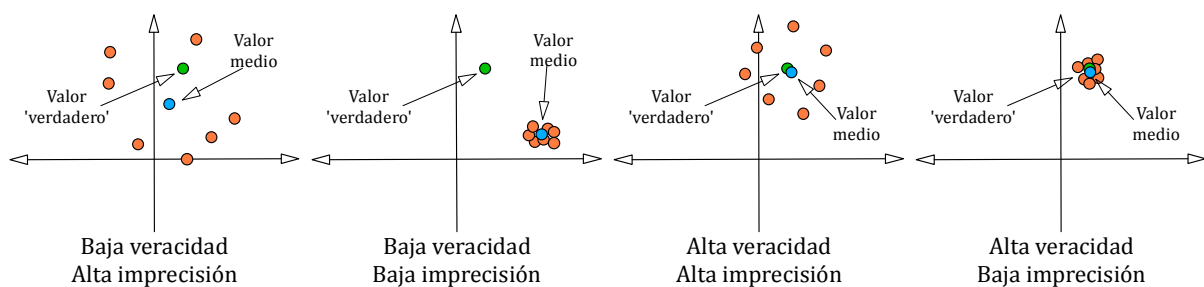


Fig. 20 Exactitud o veracidad e imprecisión son conceptos diferentes

Vamos a incorporar el valor de la precisión de los aparatos al procedimiento de estimación

de los valores de estado *normalizando los errores relativos* dividiéndolos por la precisión de sus respectivos aparatos. El ejemplo del apartado anterior quedaría así:

Valores estimados	v_1 v_2	999.0 V 902.4 V	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					e	ε	ε_n	ε_n^2
Medidas	v'_A	248.0 V	247.341	1.00%	0.659379	0.002659	0.265879	0.070691
	v'_B	227.5 V	228.013	1.00%	-0.513061	-0.002255	-0.225521	0.050860
	i'_1	250.0 A	250.562	1.00%	-0.561881	-0.002248	-0.224752	0.050514
	i'_2	-225.5 A	-224.792	1.00%	-0.708199	0.003141	0.314057	0.098632
	v'_1	999.3 V	999.0	1.00%	0.273737	0.000274	0.027393	0.000750
	v'_2	901.0 V	902.4	1.00%	-1.388466	-0.001541	-0.154103	0.023748
								$f = 0.295195$

donde (tensión A):

248.0 V	v'_A , valor medido por el aparato (lectura del aparato)
247.341 V	valor proporcionado por las ecuaciones de las mediciones a partir de los valores estimados para las variables de estado $v_1 = 999.0$ V y $v_2 = 902.4$ V.
0.659379	$e = 248.0 - 247.341$ es el error absoluto de la estimación de v_A .
0.002659	$\varepsilon = e / v'_A = 0.659379 / 248.0$ es el error relativo a la medida v'_A .
0.265879	$\varepsilon_n = \varepsilon / 1.00\% = 0.002659 / 0.01$ es el error relativo normalizado en función de la precisión del aparato.
0.070691	$\varepsilon_n^2 = 0.265879^2$ es el cuadrado del error relativo normalizado.

Con la normalización de los errores relativos usando la precisión de los aparatos se corrigen los tres problemas enunciados en la sección anterior:

- Se pondera la influencia de las medidas en proporción inversa al valor de su precisión, con lo que este parámetro ya no se ignora. Es en proporción *inversa* (dividiendo) porque las *mayores* precisiones se indican con los valores más *pequeños*.
- Se trabaja con errores relativos de manera que ya no influye el tamaño absoluto de la magnitud medida en cada caso.
- El factor de escala no influye ya. La tabla de abajo es el mismo problema que llevamos visto pero utilizando kV y kA en lugar de V y A.

Valores estimados	v_1 v_2	0.999 kV 0.902 kV	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					e	ε	ε_n	ε_n^2
Medidas	v'_A	0.248 kV	0.247	1.00%	0.000659	0.002659	0.265879	0.070691
	v'_B	0.228 kV	0.228	1.00%	-0.000513	-0.002255	-0.225521	0.050860
	i'_1	0.250 kA	0.251	1.00%	-0.000562	-0.002248	-0.224752	0.050514
	i'_2	-0.226 kA	-0.225	1.00%	-0.000708	0.003141	0.314057	0.098632
	v'_1	0.999 kV	1.0	1.00%	0.000274	0.000274	0.027393	0.000750
	v'_2	0.901 kV	0.9	1.00%	-0.001388	-0.001541	-0.154103	0.023748
								$f = 0.295195$

Los programas informáticos para la supervisión y control de los sistemas de potencia incorporan algoritmos como el que acabamos de ver, y de esta manera estiman los valores de las

variables de estado cuyas magnitudes, directas o calculadas a partir de otras medidas directas, se incorporan al sistema. Falta por explicar, no obstante, los mecanismos estadísticos que se introducen para evitar introducir en el cálculo medidas de aparatos evidentemente erróneas, de lo que se ocupa la sección siguiente.

5 TRATAMIENTO DE LOS DATOS ESPURIOS O ABERRANTES

Es evidente que si las mediciones son de calidad y las ecuaciones del modelo del sistema están bien, las estimaciones de las variables de estado que pueden deducirse por cálculo, corregido mediante técnicas de mínimos cuadrados, pueden darse por verdaderas. Pero si las mediciones incluyen datos esporádicamente improcedentes, llamados datos espurios o aberrantes (*outliers* en inglés) es preciso detectarlos. Las propiedades estadísticas de los errores facilitan esta detección.

5.1 Procedimiento general

La incorporación de miles de lecturas al SCADA de gestión de un sistema eléctrico se hace con una frecuencia muy alta, que va desde una toma de datos completa cada 4 ó 5 segundos, hasta una lectura completa una vez cada segundo, dependiendo de la complejidad del sistema y de la potencia de cálculo disponible.

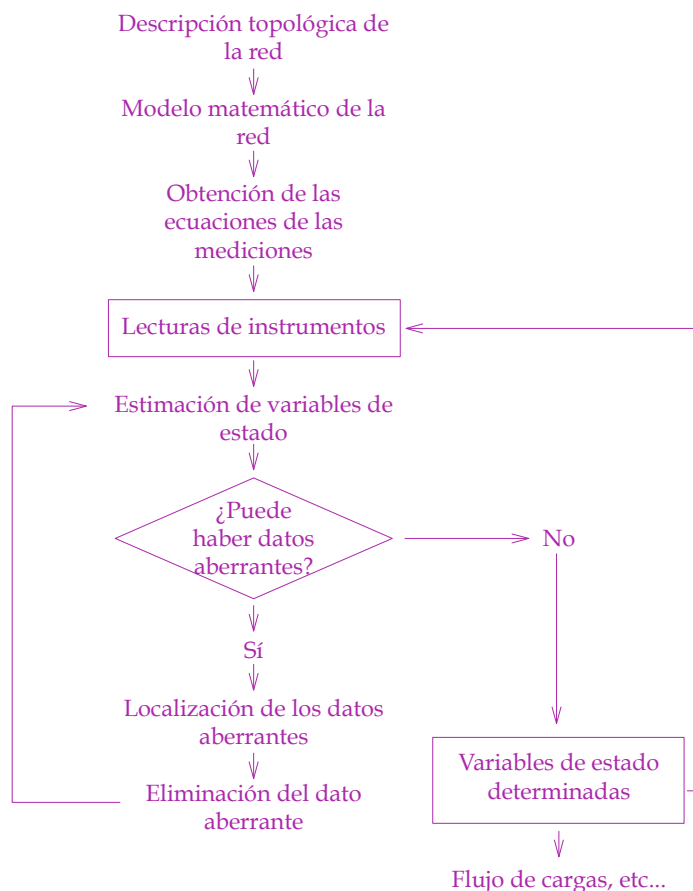


Fig. 21 Procedimiento para determinar las

A partir de cada bloque de datos se efectúa la estimación de las variables de estado, que son las tensiones en los nudos de la red, mediante el ajuste por mínimos cuadrados de los errores de las mediciones.

Una vez calculado un valor para cada variable, es preciso supervisar los resultados obtenidos:

- Si resulta estadísticamente probable que se haya partido de algún dato aberrante, éste ha de buscarse y tratarse convenientemente, lo que puede llevar a la eliminación de esa lectura del bloque de datos, o bien algún tipo de corrección específica, según el caso.

- Efectuado el tratamiento del dato espurio se estima de nuevo el valor de las tensiones en los nudos, y se supervisan otra vez los resultados obtenidos para determinar la probabilidad estadística de que aún haya otro dato aberrante. Si así fuera, se trata de la manera necesaria y se vuelve al principio.
- Solo cuando estadísticamente se compruebe que la presencia de datos espurios es improbable, entonces se dará por concluido el proceso de determinación de las variables de estado del sistema. El procedimiento se ha resumido en la fig. 19

En nuestro ejemplo es difícil apreciar la necesidad de estimar la posible presencia de mediciones aberrantes, porque al ser pocos datos, es muy sencillo buscarlas directamente. Pero en sistemas reales donde la redundancia eleva muchísimo el número de lecturas disponibles, suele ser interesante tener un criterio rápido para detectar si es probable que haya alguna medida errónea y, si efectivamente pudiera haberla, entonces se buscaría. Cuando, además, es preciso tomar lecturas continuamente porque se está trabajando en tiempo real, este procedimiento rebaja muchísimo la potencia de cálculo necesaria.

5.2 Probabilidad de existencia de lecturas erróneas

La Estadística demuestra que el comportamiento de la variable aleatoria f definida en el apartado 4.3, una vez mejorada como vimos en el apartado 4.4, se corresponde bien con la distribución de probabilidades chi-cuadrado (χ^2). Para determinar si en un conjunto de lecturas de instrumentos puede haber algún dato aberrante (un *intruso*, *outlier* en inglés), se obtiene el valor máximo de f asignado por la distribución χ^2 , y si el valor calculado a partir de los errores es superior, entonces hay probablemente un dato aberrante (atípico, espurio), que deberá buscarse y analizarse mediante alguna de las técnicas que veremos más adelante. Efectuado el tratamiento, se recalcula de nuevo f , se compara otra vez con el valor χ^2 , y si f volviera a ser mayor que χ^2 se considera que sigue habiendo datos espurios y se repite el proceso. Cuando ya no sea así, las lecturas se dan por buenas, y se concluye que los valores estimados de las variables de estado obtenidos a partir de ellas son los *mejores valores* posibles.

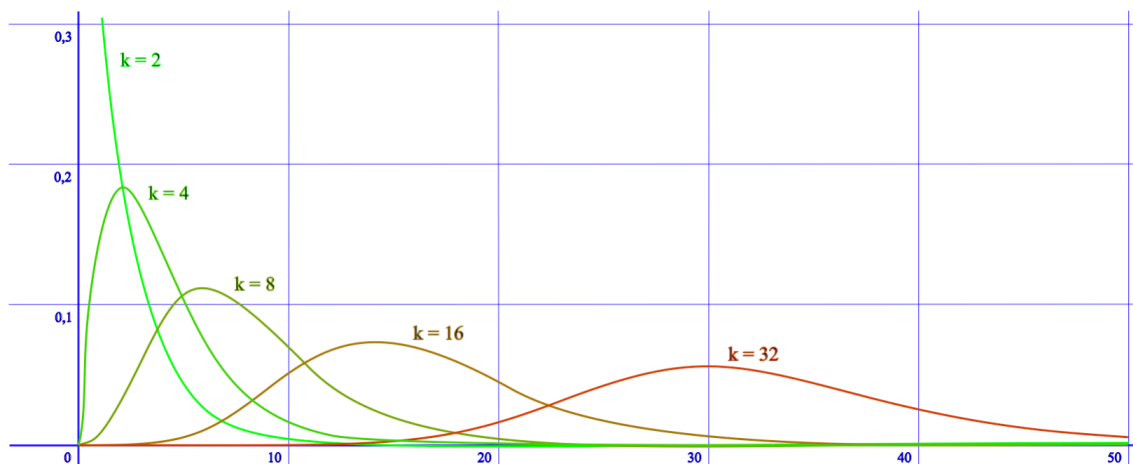


Fig. 22 Funciones de densidad de la distribución χ^2 para diferentes grados de libertad k .

Para conocer el valor máximo de f a partir del cual se deben buscar datos aberrantes, hay que determinar, primero, el *número de grados de libertad* k de la muestra a analizar, que es la diferencia entre el número de datos o lecturas disponibles y el número de variables de estado a determinar a partir de ellos.

Ese número de grados de libertad k fija la curva a utilizar. Ahora ya, la probabilidad de obtener un valor de f determinado es el área de la curva comprendida entre 0 y ese valor de f . Y lo que es más importante, al revés, para un valor de probabilidad deseado, es decir, para un área fijada, la curva señala la *abscisa* f correspondiente.

Esto quiere decir que se puede conocer de antemano, con un grado de probabilidad elegido a voluntad, cuál es el valor máximo de f que cabe esperar obtener: si todas las medidas de los aparatos son razonablemente buenas, el valor de f realmente calculado no superará el esperado. De lo contrario, habrá indicios suficientes para iniciar la búsqueda de errores, pues la probabilidad de que los haya es superior al umbral elegido.

El área, es decir, la integral de la curva, no se puede resolver de forma analítica, con lo que hay que calcularla mediante técnicas numéricas. Lo habitual es recurrir a valores tabulados a partir del número de grados de libertad k y de la probabilidad P exigida para la verificación.

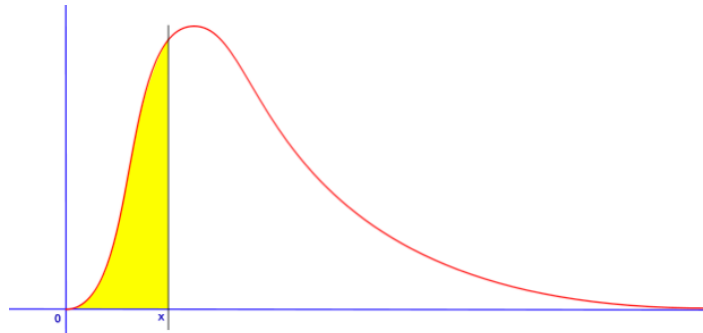


Fig. 23 La probabilidad asignada a x es el valor del área coloreada. Toda el área bajo la curva vale 1.

Así, aquellas medidas que arrojen un valor de f superior al valor de χ^2 obtenido para el número de grados de libertad k y una probabilidad P , resultarán sospechosas y convendrá buscar errores.

En nuestro ejemplo disponíamos de 6 lecturas para determinar 2 variables de estado, luego $k = 6 - 2 = 4$. También es frecuente aceptar medidas con una *tolerancia* (otro nombre para la probabilidad asignada mediante la curva de distribución) de un 95%, lo que significa sospechar de aquellas lecturas cuyos errores arrojen valores de f cuya probabilidad de ocurrir sea superior a ese 95%. En la práctica eso significa sospechar de aquellas medidas para las que

$$f > \chi_{k,P}^2 \quad \text{con } k = 4 \text{ y } P = 0.95$$

Según la tabla de la distribución χ^2 para los valores de k y P citados la variable f no debería superar el valor de 9.488: $f \leq \chi_{4,95\%}^2 = 9.488$. Puede comprobarse que en ninguno de los casos lo ha hecho (se obtuvo $f = 0.295195$), con lo que, a priori, no sería imprescindible buscar errores en las lecturas, aceptándose como válida la estimación de las variables de estado obtenida a partir de todas ellas.

Tabla de la distribución χ^2 inversa

k \ P	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
1	0.000	0.004	0.016	0.064	0.102	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.103	0.211	0.446	0.575	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	1.005	1.213	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.649	1.923	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.343	2.675	3.000	3.656	4.351	5.132	6.064	6.626	7.289	9.236	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.070	3.455	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	7.841	8.558	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	3.822	4.255	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.037	9.803	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	4.594	5.071	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	10.22	11.03	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.380	5.899	6.393	7.357	8.343	9.414	10.66	11.39	12.24	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.179	6.737	7.267	8.295	9.342	10.47	11.78	12.55	13.44	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	6.989	7.584	8.148	9.237	10.34	11.53	12.90	13.70	14.63	17.28	19.68	24.73
12	3.571	5.226	6.304	7.807	8.438	9.034	10.18	11.34	12.58	14.01	14.85	15.81	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.041	8.634	9.299	9.926	11.13	12.34	13.64	15.12	15.98	16.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	9.467	10.17	10.82	12.08	13.34	14.69	16.22	17.12	18.15	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	10.31	11.04	11.72	13.03	14.34	15.73	17.32	18.25	19.31	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.15	11.91	12.62	13.98	15.34	16.78	18.42	19.37	20.47	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.09	12.00	12.79	13.53	14.94	16.34	17.82	19.51	20.49	21.61	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.86	12.86	13.68	14.44	15.89	17.34	18.87	20.60	21.60	22.76	25.99	28.87	34.81
19	7.633	10.12	11.65	13.72	14.56	15.35	16.85	18.34	19.91	21.69	22.72	23.90	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.85	12.44	14.58	15.45	16.27	17.81	19.34	20.95	22.77	23.83	25.04	28.41	31.41	37.57
21	8.897	11.59	13.24	15.44	16.34	17.18	18.77	20.34	21.99	23.86	24.93	26.17	29.62	32.67	38.93
22	9.542	12.34	14.04	16.31	17.24	18.10	19.73	21.34	23.03	24.94	26.04	27.30	30.81	33.92	40.29
23	10.20	13.09	14.85	17.19	18.14	19.02	20.69	22.34	24.07	26.02	27.14	28.43	32.01	35.17	41.64
24	10.86	13.85	15.66	18.06	19.04	19.94	21.65	23.34	25.11	27.10	28.24	29.55	33.20	36.42	42.98
25	11.52	14.61	16.47	18.94	19.94	20.87	22.62	24.34	26.14	28.17	29.34	30.68	34.38	37.65	44.31
26	12.20	15.38	17.29	19.82	20.84	21.79	23.58	25.34	27.18	29.25	30.43	31.79	35.56	38.89	45.64
27	12.88	16.15	18.11	20.70	21.75	22.72	24.54	26.34	28.21	30.32	31.53	32.91	36.74	40.11	46.96
28	13.56	16.93	18.94	21.59	22.66	23.65	25.51	27.34	29.25	31.39	32.62	34.03	37.92	41.34	48.28
29	14.26	17.71	19.77	22.48	23.57	24.58	26.48	28.34	30.28	32.46	33.71	35.14	39.09	42.56	49.59
30	14.95	18.49	20.60	23.36	24.48	25.51	27.44	29.34	31.32	33.53	34.80	36.25	40.26	43.77	50.89
35	18.51	22.47	24.80	27.84	29.05	30.18	32.28	34.34	36.47	38.86	40.22	41.78	46.06	49.80	57.34
40	22.16	26.51	29.05	32.34	33.66	34.87	37.13	39.34	41.62	44.16	45.62	47.27	51.81	55.76	63.69
45	25.90	30.61	33.35	36.88	38.29	39.58	42.00	44.34	46.76	49.45	50.98	52.73	57.51	61.66	69.96
50	29.71	34.76	37.69	41.45	42.94	44.31	46.86	49.33	51.89	54.72	56.33	58.16	63.17	67.50	76.15
60	37.48	43.19	46.46	50.64	52.29	53.81	56.62	59.33	62.13	65.23	66.98	68.97	74.40	79.08	88.38
70	45.44	51.74	55.33	59.90	61.70	63.35	66.40	69.33	72.36	75.69	77.58	79.71	85.53	90.53	100.4
80	53.54	60.39	64.28	69.21	71.14	72.92	76.19	79.33	82.57	86.12	88.13	90.41	96.58	101.9	112.3
90	61.75	69.13	73.29	78.56	80.62	82.51	85.99	89.33	92.76	96.52	98.65	101.1	107.6	113.1	124.1
100	70.06	77.93	82.36	87.95	90.13	92.13	95.81	99.33	102.9	106.9	109.1	111.7	118.5	124.3	135.8
150	112.7	122.7	128.3	135.3	138.0	140.5	145.0	149.3	153.8	158.6	161.3	164.3	172.6	179.6	193.2
200	156.4	168.3	174.8	183.0	186.2	189.0	194.3	199.3	204.4	210.0	213.1	216.6	226.0	234.0	249.4

Un criterio más estricto, por ejemplo para $P = 25\%$ obligaría a sospechar de las lecturas para las que $f > \chi_{4,0.25}^2 = 1.923$ y buscar, entonces, qué datos erróneos tratar.

5.3 Localización de valores aberrantes

Cuando tras el procedimiento de la sección anterior se llega a la conclusión de que sí es probable existencia de errores en las lecturas de los aparatos, hay que localizarlos y tratarlos. Más adelante veremos alguno de los métodos posibles para ello.

Qué hacer después de localizar los presuntos valores *aberrantes* o *espurios* depende del caso concreto:

- Hay casos en los que conviene *eliminar* los datos aberrantes: se trata de aquellos en los que se sabe que la distribución de errores es efectivamente *normal*, es decir, se sabe que la probabilidad de obtener un error negativo o por defecto es igual a la probabilidad de obtener un error positivo o por exceso, y además se conoce bien el proceso de cálculo de los errores. Entonces se puede estar razonablemente seguro de



estar ante lecturas erróneas y pueden desecharse.

- En otros casos, sin embargo, cuando no se cumple la primera condición (distribución *normal* de los errores) o la segunda (*proceso de cálculo* no bien conocido), es preciso mantener lecturas supuestamente erróneas pues la decisión de eliminar los datos aberrantes no está automáticamente justificada.

En nuestro caso se puede considerar que sí se dan las condiciones para proceder a la eliminación de los datos espurios que se localicen, y la cuestión será identificarlos. Para ello hay varias estrategias.

MAYORES ERRORES DE MEDIDA

La forma más evidente de localizar las medidas que pueden ser anormales o erróneas es considerar el valor del error de medida al cuadrado e^2 : aquellas magnitudes que presenten el mayor error pueden considerarse mediciones atípicas.

Siguiendo con el ejemplo del capítulo anterior, supongamos que el voltímetro 2 comunica una lectura claramente errónea: ahora, debido a un error en el sistema de transmisión de los datos, dice medir 1000.0 V donde antes decía que había 901.0 V. Si las mediciones y sus estimaciones son las de la tabla siguiente, donde el valor obtenido para f es claramente exagerado con una tolerancia del 75% por ejemplo.

Valores estimados	v_1	v_2	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					e	ε	ε_n	ε_n^2
	997.7 V	932.5 V						
	248.0 V	247.806	247.806	1.00%	0.193954	0.000782	0.078207	0.006116
	227.5 V	234.760	234.760	1.00%	-7.260049	-0.031912	-3.191230	10.183951
Medidas	i'_1	250.0 A	249.980	1.00%	0.019622	0.000078	0.007849	0.000062
	i'_2	-225.5 A	-232.586	1.00%	7.085716	-0.031422	-3.142225	9.873575
	v'_1	999.3 V	997.7	1.00%	1.552819	0.001554	0.155391	0.024146
	v'_2	1000.0 V	932.5	1.00%	67.482802	0.067483	6.748280	45.539285
								$f = 65.627136$

$\chi_{4,0.75}^2 = 5.385$; $f = 65.627136$: claramente $f \gg \chi_{4,0.75}^2$
 luego con el 75% de probabilidad hay al menos un dato aberrante

Lo evidente es dudar del valor leído del voltímetro 2 ($v'_2 = 1000.0$ V) porque su error normalizado cuadrático es sospechoso: $\varepsilon_n^2 = 45.539285$.

Esa medida se elimina sacándola del conjunto de datos de partida. Y se vuelven a determinar las variables de estado v_1 y v_2 contando solo con las medidas no eliminadas, repitiendo el mismo procedimiento que ya hemos visto:

Valores estimados	v_1	v_2	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					e	ε	ε_n	ε_n^2
	999.0 V	903.1 V						
	248.0 V	247.352	247.352	1.00%	0.647874	0.002612	0.261240	0.068246
	227.5 V	228.180	228.180	1.00%	-0.679837	-0.002988	-0.298829	0.089299
Medidas	i'_1	250.0 A	250.548	1.00%	-0.547507	-0.002190	-0.219003	0.047962
	i'_2	-225.5 A	-224.984	1.00%	-0.515545	0.002286	0.228623	0.052268

v'_1	999.3 V	999.0	1.00%	0.305354	0.000306	0.030557	0.000934
v'_2	1000.0 V	903.1	1.00%				
						$f =$	$\frac{0.030557}{0.000934}$

Ahora ya $f \not\approx \chi^2_{3,0.75} = 4.108$, con lo que habríamos llegado a los valores de las variables de estado que daremos por buenos: $v_1 = 999.0$ V y $v_2 = 903.1$ V.

USO DE LA DESVIACIÓN TÍPICA

Otra técnica para localizar errores parte de la presunción de que los errores por defecto son igual de probables que los errores por exceso, con lo que la distribución de errores se considera *normal*.

Los datos atípicos pueden ser aquellos errores cuyo valor se aleja de la media de errores más de lo "normal". El criterio de alejamiento "normal" se fija a partir de la desviación típica, que como su nombre indica, da idea de hasta cuánto es más probable que se alejen los valores de su media. Según la distribución de probabilidades que se adopte, ese valor será uno u otro.

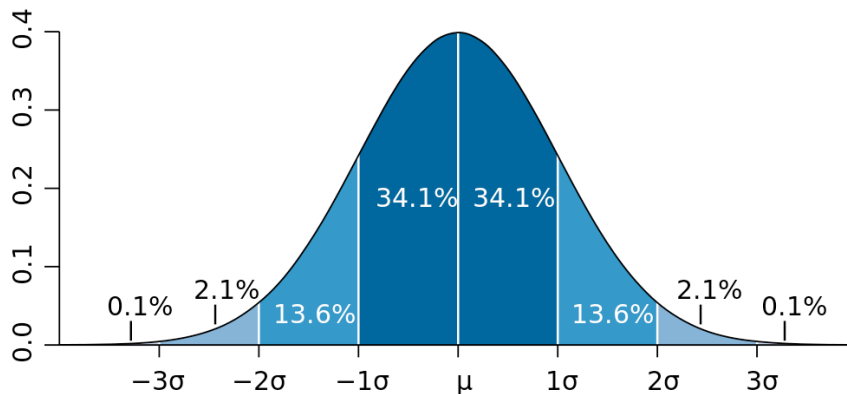


Fig. 24 Distribución normal o gaussiana de probabilidades en función de la desviación típica de la muestra σ . Fijándonos en el área bajo la curva, el $34.1\% + 34.1\% = 68.2\%$ de los errores no estarán más alejados de la media que una desviación típica.

Lo más habitual es considerar una distribución *gaussiana* o *normal* de los errores. La función que determina la probabilidad de cada error es la de la fig. 22, donde se representa esa probabilidad frente al número de veces que el error sobrepasa la desviación típica σ de todos los errores.

La desviación típica suele denotarse con una σ (sigma):

$$\sigma = +\sqrt{\frac{(e_1 - \bar{e})^2 + (e_2 - \bar{e})^2 + \dots + (e_N - \bar{e})^2}{N}} \quad (*)$$

(*) En la hoja de cálculo Excel de Microsoft esta función se denomina =DESVESTP().

Como la media de la misma muestra es

$$\bar{e} = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_N}{N}$$

la desviación típica de la muestra también se puede calcular como

$$\sigma = +\sqrt{\overline{e^2} - \bar{e}^2} \quad \text{con} \quad \overline{e^2} = \frac{e_1^2 + e_2^2 \dots + e_N^2}{N}$$

La probabilidad de que un error se encuentre entre más-menos una vez la desviación típica, es decir, que no se aleje de la media más de $\pm \sigma$, es lo que valga el área bajo la campana de Gauss entre las verticales levantadas sobre $-\sigma$ y $+\sigma$. Estos valores están tabulados a partir de procedimientos numéricos, porque la campana no tiene integral analítica. Resulta que el 68% de los errores estarán entre más-menos una vez la desviación típica de los errores; el 95% lo estarán entre más-menos dos veces la desviación típica y el 99.7% estarán entre más-menos tres veces la desviación típica. Esta regla empírica es la que se conoce como regla de las tres sigmas.

EJEMPLO RESUELTO:

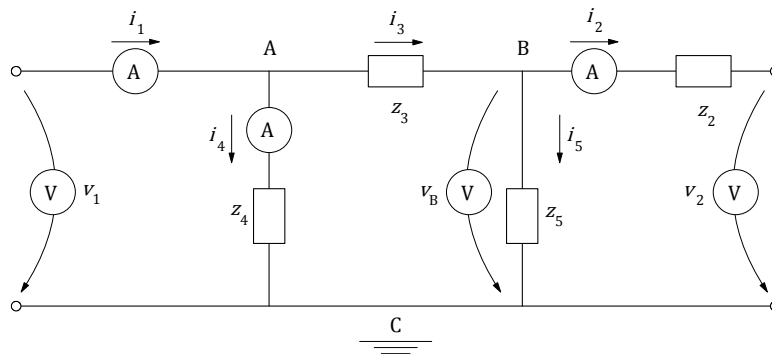


Fig. 25 Seis aparatos de medida para obtener dos variables de estado.

Tras obtener las ecuaciones de las mediciones y ajustar los errores por el método de los mínimos cuadrados, se comprueba que para $k = 4$ y una tolerancia del 75%, el valor de $f = 58.169149$ es mayor que el valor de χ^2 a tener en cuenta en este caso: $f > \chi_{4,0.75}^2 = 5,385$. Por lo que concluimos que hemos trabajado a partir de medidas erróneas, es decir, que muy probablemente había algún dato erróneo entre las mediciones de partida.

	Valores		Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores				
	v_1	v_2			e	ε	ε_n	ε_n^2	
	5911.2 V	5613.3 V							
	v'_B	142.0 V	141.9 V	1.00%	0.125211	0.000882	0.088177	0.007775	
	i'_1	645.0 A	636.0 A	2.50%	8.950862	0.013877	0.555092	0.308127	
Medidas	i'_2	583.0 A	575.5 A	2.50%	7.482029	0.012834	0.513347	0.263525	
	i'_4	50.0 A	59.1 A	2.50%	-9.112420	-0.182248	-7.289936	53.143164	
	v'_1	6001.0 V	5 911 V	1.00%	89.758024	0.014957	1.495718	2.237172	
	v'_2	5698.0 V	5 613 V	1.00%	84.695081	0.014864	1.486400	2.209385	
							$f =$	58.169149	
					$\overline{\varepsilon^2} =$	9.694858		$\sigma_{\varepsilon 2} =$	19.452099

Si el criterio de aceptación de los valores estimados para v_1 y v_2 fuera el de 1.5σ , todas las medidas de los aparatos serían admisibles excepto la del amperímetro 4, ya que su error cuadrático supera el umbral fijado:

$$\overline{\varepsilon^2} + 1.5\sigma = 9.694858 + 1.5 \times 19.452099 = 38.87$$

Si el criterio de aceptación de datos de partida se relajase, por ejemplo subiendo hasta 3.0σ , entonces esa medida problemática no quedaría señalada:

$$\overline{\varepsilon^2} + 3.0 \sigma = 9.694858 + 3.0 \times 19.452099 = 68.05$$

En este ejemplo concreto resulta más útil, por tanto, adoptar el criterio 1.5σ , que sí localiza el error en la medida i'_4 . Ajustar este criterio en sistemas reales es algo que se consigue con la práctica.

Localizada la medida que consideramos errónea, resulta conveniente eliminarla, sacándola del conjunto de datos de partida. Pero al hacerlo, los valores que se obtendrían de las variables de estado v_1 y v_2 contando solo con las medidas no eliminadas no serán los mismos que antes, pues habría que recalcularlos repitiendo el mismo procedimiento que ya hemos visto:

Valores estimados	v_1	5997.2 V	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					e	ε	ε_n	ε_n^2
Medidas	v'_B	142.0 V	142.0 V	1.00%	-0.002857	-0.000020	-0.002012	0.000004
	i'_1	645.0 A	645.5 A	2.50%	-0.495495	-0.000768	-0.030728	0.000944
	i'_2	583.0 A	584.1 A	2.50%	-1.103123	-0.001892	-0.075686	0.005728
	i'_4							
	v'_1	6001.0 V	5 997 V	1.00%	3.765631	0.000628	0.062750	0.003938
	v'_2	5698.0 V	5 699 V	1.00%	-1.028369	-0.000180	-0.018048	0.000326
								$f = 0.010940$
$\overline{\varepsilon^2} =$					$\sigma_{\varepsilon^2} =$			

El resultado sería ahora, en principio, que $v_1 = 5997.2$ V y $v_2 = 5699.0$ V. El nuevo valor de f hay que compararlo con $\chi^2_{3, 0.75} = 4.108$ (atención, que ahora $k = 3$) y como ya $f < \chi^2$ podemos afirmar, con un 75% de tolerancia, que ya no había más medidas aberrantes y dar por bueno el resultado: $v_1 = 5997.2$ V y $v_2 = 5699.0$ V.

La esencia de lo visto es que las técnicas estadísticas proporcionan ciertas herramientas útiles para la detección de posibles errores, y que con un adecuado tratamiento matemático un conjunto sobreabundante de medidas puede ofrecernos los valores 'verdaderos' de las variables buscadas.

5.4 Otros métodos estadísticos

La distribución normal utilizada en los criterios expuestos más arriba no es la única distribución que existe. En Estadística hay otras distribuciones, cada una más adecuada que las demás para describir el comportamiento de variables aleatorias de diferentes características. Así se tienen, entre otras, la distribución t de STUDENT, la distribución chi-cuadrado χ^2 ya vista, o la distribución de CAUCHY.

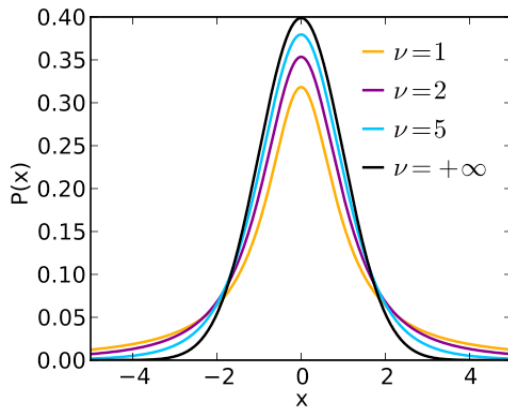


Fig. 26 Función de densidad de la distribución t de Student. Cuando ν se hace grande, la función tiende a la distribución normal

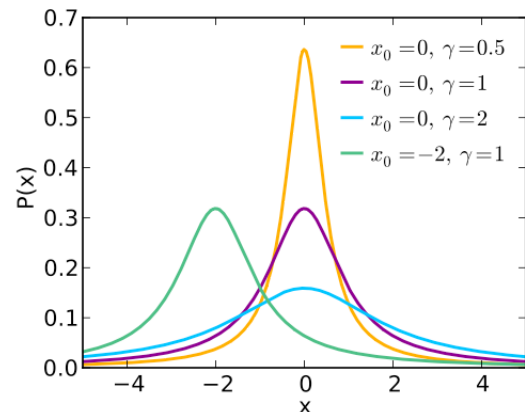


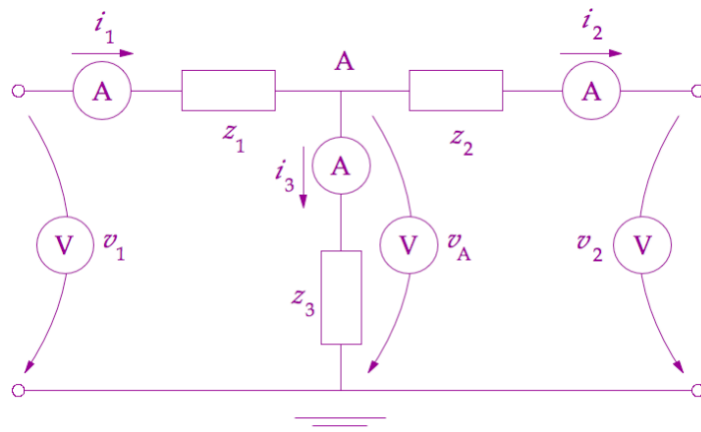
Fig. 27 Función de densidad de la distribución de probabilidades de Cauchy.

El análisis consistirá en elegir la curva de distribución de probabilidades más adecuada a las características estadísticas de la variable aleatoria considerada, aceptar solo aquellos valores que se encuentren dentro de los límites razonables de probabilidad, y rechazar aquellos que caigan fuera de esos límites.

6 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea el cuadripolo de la figura, en el que se conocen los valores de las impedancias y las lecturas de los amperímetros (precisión 3%) y voltímetros (precisión 1%) en un instante dado:

$z_1 = 10 \Omega$	$v'_A = 124.86 \text{ kV}$
$z_2 = 10 \Omega$	$i'_1 = 15.90 \text{ A}$
$z_3 = 50 \text{ k}\Omega$	$i'_2 = 13.05 \text{ A}$
	$i'_3 = 2.54 \text{ A}$
	$v'_1 = 127.17 \text{ kV}$
	$v'_2 = 126.73 \text{ kV}$



Se trata de la representación monofásica de un componente de un sistema eléctrico de potencia perteneciente a una red cuya tensión compuesta (entre fases) es de 220 kV. Estimar los valores de las variables de estado v_1 y v_2 a partir de las lecturas de los aparatos.

Solución:

Lo primero es obtener las ecuaciones de las mediciones. Para ello se puede utilizar el programa *Mathematica*® de WOLFRAM RESEARCH INC., que permite despejar las incógnitas de un sistema de ecuaciones con gran sencillez. También pueden despejarse manualmente, pero es

un trabajo lento y desagradable. Con *Mathematica*® se haría así:

Debe definirse la red mediante un sistema de ecuaciones distintas que impliquen todos los componentes de la red y las lecturas de todos los aparatos instalados. En este caso las tres impedancias, los tres amperímetros y los tres voltímetros.

Se precisan tantas ecuaciones distintas como ecuaciones de mediciones se desee obtener. Es decir, tantas como aparatos medidores, sin contar con los que registran las propias variables de estado v_1 y v_2 . En este caso se necesitan cuatro ecuaciones.

Suele dar buen resultado, para cumplir los dos requisitos anteriores, comenzar con una ecuación por nudo (método de los nudos) y luego una ecuación por bucle (método de las mallas), para finalmente incluir los datos de la red que aún no formen parte de ella. Por ejemplo así:

a) Se aplica la 1ª ley de Kirchhoff en la forma *la suma de las intensidades que salen del nudo es cero* al nudo A, y se obtiene:

$$-i_1 + i_3 + i_2 = 0$$

b) Como no hay más nudos (salvo el de referencia, que no cuenta) se procede a usar ahora el método de las mallas. La primera, el bucle formado a la izquierda, conduce a escribir

$$v_1 = z_1 i_1 + v_A$$

c) La tercera ecuación es la de la malla de la derecha

$$v_2 = -z_2 i_2 + v_A$$

d) Para escribir la cuarta y última ecuación se observa que la impedancia z_3 aún no forma parte de ninguna ecuación, y para remediarlo puede ponerse que

$$v_A = z_3 i_3$$

pero también valdría reescribir la primera ecuación incluyendo ahora a z_3 así

$$-i_1 + \frac{v_A}{z_3} + i_2 = 0$$

El sistema que describe la red es entonces el siguiente:

$$\begin{cases} -i_1 + i_3 + i_2 = 0 \\ v_1 = z_1 i_1 + v_A \\ v_2 = -z_2 i_2 + v_A \\ v_A = z_3 i_3 \end{cases}$$

Ahora ya se puede introducir el sistema en *Mathematica*® de esta forma:



```
Remove["Global`*"];
z1 = 10; z2 = 10; z3 = 50 000;
Expand[
Solve[{-i1 + i2 + i3 == 0, 1000 v1 == z1 i1 + 1000 vA,
1000 v2 == -z2 i2 + 1000 vA, 0 == -i1 +  $\frac{1000 vA}{z3} + i2$ }, {i1, i2, i3, vA}]]
```

El resultado se obtiene con la tecla INTRO y son las ecuaciones de las mediciones, es decir, los valores analíticos para las magnitudes medidas por los instrumentos, v_A , i_1 , i_2 e i_3 , en función de las variables de estado v_1 y v_2 :

$$\left\{ \left\{ i_1 \rightarrow \frac{500 \ 100 \ v_1}{10 \ 001} - \frac{500 \ 000 \ v_2}{10 \ 001}, i_2 \rightarrow \frac{500 \ 000 \ v_1}{10 \ 001} - \frac{500 \ 100 \ v_2}{10 \ 001}, \right. \right.$$

$$\left. i_3 \rightarrow \frac{100 \ v_1}{10 \ 001} + \frac{100 \ v_2}{10 \ 001}, v_A \rightarrow \frac{5000 \ v_1}{10 \ 001} + \frac{5000 \ v_2}{10 \ 001} \right\}$$

Notas:

La instrucción `Remove["Global`*"]`; eliminará todos los resultados de variables obtenidas en ejecuciones de celdas anteriores, por lo que la primera vez no habrá nada que eliminar y aparecerá un mensaje de error que se puede ignorar.

En caso de obtener otros errores, hay que verificar cuidadosamente la sintaxis del código introducido para su ejecución por *Mathematica*®.

La tabla siguiente organiza los datos y los resultados. En la columna de medidas estimadas aparecen los resultados que proporcionan las ecuaciones de las mediciones cuando se considera que v_1 y v_2 valen lo que aparezca en las casillas sombreadas. También se indican los errores absolutos, los errores relativos, los normalizados y en la última columna sus valores cuadráticos. La suma de éstos es el valor de f que aparece al final de la tabla.

La técnica de los mínimos cuadrados conduce a estimar los valores que se indican para v_1 y v_2 en las casillas sombreadas, porque son los que hacen mínima la variable f , es decir, hacen mínima la suma de los cuadrados de los errores relativos normalizados de las medidas calculadas a partir de las ecuaciones de mediciones.

Valores estimados	v_1	126.42 kV	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
	v_2	126.13 kV			e	ε	ε_n	ε_n^2
Medidas	v'_A	124.86 kV	126.27 kV	1.00%	-1.4053	-0.0113	-1.1255	1.2668
	i'_1	15.90 A	15.71 A	3.00%	0.1939	0.0122	0.4065	0.1653
	i'_2	13.05 A	13.18 A	3.00%	-0.1308	-0.0100	-0.3340	0.1116
	i'_3	2.54 A	2.53 A	3.00%	0.0147	0.0058	0.1928	0.0372
	v'_1	127.17 kV	126.42 kV	1.00%	0.7476	0.0059	0.5879	0.3456
	v'_2	126.73 kV	126.13 kV	1.00%	0.5965	0.0047	0.4707	0.2215
							$f =$	2.1480

Esta solución se ha obtenido mediante iteraciones sucesivas empleando la herramienta Solver de Excel y en principio se tomaría $v_1 = 126.42$ kV y $v_2 = 126.13$ kV.

2. Supervisar los resultados obtenidos en el problema 1 mediante el criterio chi-cuadrado con un grado de tolerancia del 25% de no estar trabajando con lecturas erróneas.

Solución:

Para aplicar el criterio χ^2 se precisa calcular primero el número de grados de libertad, que es el de lecturas disponibles (las medidas de los 6 aparatos instalados) menos el de valores de estado a determinar (las dos tensiones v_1 y v_2):

$$k = 6 - 2 = 4$$

Después hay que obtener el valor de χ^2 para esa k y la probabilidad (tolerancia) buscada, que es de 0.25. Recurriendo a la tabla inversa de valores se obtiene, con $k = 4$ y $P = 0.25$, que $\chi^2 = 1.923$. Como el valor de f en el ejercicio 1 resultó ser $f = 2.1480$ hay que concluir, con un 25% de tolerancia, que entre los datos utilizados hay al menos alguno espurio, una lectura errónea.

3. Estimar los valores de las variables de estado v_1 y v_2 del ejercicio 1, con un grado de tolerancia del 25%, eliminando las posibles lecturas erróneas de mayor error cuadrático.

Solución:

En el ejercicio 2 se comprobó que era probable que hubiera al menos una lectura cuyo valor debe ser considerado atípico. Procediendo como se explicó se organizan los datos como en la siguiente tabla:

Valores estimados	v_1	126.42 kV	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					v_2	126.13 kV	e	ε
	v'_A	124.86 kV	126.27 kV	1.00%	-1.4053	-0.0113	-1.1255	1.2668
Medidas	i'_1	15.90 A	15.71 A	3.00%	0.1939	0.0122	0.4065	0.1653
	i'_2	13.05 A	13.18 A	3.00%	-0.1308	-0.0100	-0.3340	0.1116
	i'_3	2.54 A	2.53 A	3.00%	0.0147	0.0058	0.1928	0.0372
	v'_1	127.17 kV	126.42 kV	1.00%	0.7476	0.0059	0.5879	0.3456
	v'_2	126.73 kV	126.13 kV	1.00%	0.5965	0.0047	0.4707	0.2215
							$f =$	2.1480

El valor de v'_A , cuyo error cuadrático es de 1.2668, destaca como el peor de todos. Lo consideramos espurio y, como el problema pide eliminarlo, borramos su fila de la tabla. Obtenemos ahora nuevos valores estimados para v_1 y v_2 según el mismo procedimiento de mínimos cuadrados (hacer mínimo el valor de f optimizando mediante la herramienta Solver de Excel):

Valores estimados	v_1	127.09 kV	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					v_2	126.81 kV	e	ε
	v'_A	124.86 kV	126.94 kV	1.00%				
Medidas	i'_1	15.90 A	15.64 A	3.00%	0.2570	0.0162	0.5387	0.2902
	i'_2	13.05 A	13.10 A	3.00%	-0.0543	-0.0042	-0.1387	0.0192
	i'_3	2.54 A	2.54 A	3.00%	0.0013	0.0005	0.0166	0.0003
	v'_1	127.17 kV	127.09 kV	1.00%	0.0770	0.0006	0.0605	0.0037
	v'_2	126.73 kV	126.81 kV	1.00%	-0.0756	-0.0006	-0.0596	0.0036
							$f =$	0.3169

El nuevo valor de $f = 0.3169$ es menor también que el valor de χ^2 para $k = 5 - 2 = 3$ y una



tolerancia del 25%, que según la tabla de valores es $\chi^2 = 1.213$. Luego podemos suponer que ya no hay más lecturas atípicas. Por ello se puede afirmar que el valor *verdadero* de v_1 y v_2 es $v_1 = 127.09$ kV y $v_2 = 126.81$ kV.

4. Estimar de nuevo los valores de las variables de estado v_1 y v_2 del ejercicio 1, con un grado de tolerancia del 25%, eliminando sucesivamente las posibles lecturas erróneas mediante el criterio 1.5 sigma.

Solución:

Organizando los datos como es habitual, calculamos a continuación la media aritmética de los errores cuadráticos y su desviación típica:

Valores estimados	v_1	126.42 kV	Medidas estimadas	Precisión (%)	e	Errores				
	v_2	126.13 kV				ϵ	ϵ_n	ϵ_n^2		
	v'_A	124.86 kV	126.27 kV	1.00%	-1.4053	-0.0113	-1.1255	1.2668		
	i'_1	15.90 A	15.71 A	3.00%	0.1939	0.0122	0.4065	0.1653		
Medidas	i'_2	13.05 A	13.18 A	3.00%	-0.1308	-0.0100	-0.3340	0.1116		
	i'_3	2.54 A	2.53 A	3.00%	0.0147	0.0058	0.1928	0.0372		
	v'_1	127.17 kV	126.42 kV	1.00%	0.7476	0.0059	0.5879	0.3456		
	v'_2	126.73 kV	126.13 kV	1.00%	0.5965	0.0047	0.4707	0.2215		
								$f =$	2.1480	
					$\overline{\epsilon^2} =$	0.3580			$\sigma_{\epsilon^2} =$	0.4174

Si nos fijamos en los valores cuadráticos de los errores ϵ_n^2 , la media vale 0.3580 y la desviación típica (sigma) es de 0.4174. Una desviación de 1.5 sigma respecto de la media equivale a sospechar de aquellos valores que caigan fuera del siguiente intervalo:

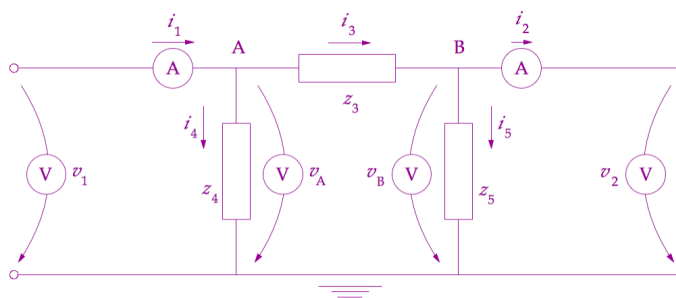
$$0 \leq \text{errores razonables} \leq 0.3580 + 1.5 \times 0.4174$$

$$0 \leq \text{errores razonables} \leq 0.9841$$

El valor de v'_A , cuyo error cuadrático es de 1.2668, es el único que destaca como valor atípico. El problema pide eliminarlo, ignorar la lectura de v'_A , lo que ya se hizo en el problema 3, por lo que se debe llegar a la misma solución que allí.

5. Sea el cuadripolo de la figura. Estímense los valores de las variables de estado v_1 y v_2 a partir de los datos de la red y de las lecturas y precisiones siguientes, eliminando sucesivamente las medidas de mayor error cuadrático con una probabilidad de error del 50%:

$z_4 = 1000 \Omega$	$v'_1 = 76.20$ kV (0.5%)	$i'_1 = 138.0$ A (1.0%)
$z_5 = 1000 \Omega$	$v'_2 = 75.92$ kV (0.5%)	$i'_2 = -18.15$ A (1.0%)
$z_3 = 5 \Omega$	$v'_A = 76.22$ kV (1.0%)	
	$v'_B = 75.91$ kV (1.0%)	



Solución:

Aplicando la 1ª ley de Kirchhoff en la forma la suma de las intensidades que salen de cada nudo es cero se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} A) \quad -i_1 + i_4 + i_3 = 0 \\ B) \quad -i_3 + i_5 + i_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -i_1 + \frac{1}{z_4} v_A + \frac{1}{z_3} (v_A - v_B) = 0 \\ \frac{1}{z_3} (v_B - v_A) + \frac{1}{z_5} v_B + i_2 = 0 \end{array}$$

Las ecuaciones de las mallas de la izquierda y de la derecha son:

$$\left. \begin{array}{l} C) \quad v_1 = v_A \\ D) \quad v_2 = v_B \end{array} \right\}$$

Se comprueba que se han escrito las suficientes ecuaciones distintas (tantas como aparatos medidores menos dos) y que ya involucran todas las impedancias de la red, por lo que pueden introducirse ya en *Mathematica*® para obtener las ecuaciones de las mediciones. Luego la tabla organiza la búsqueda de la primera solución a través del método de los mínimos cuadrados.

```
Remove["Global`*"];
z4 = 1000; z5 = 1000; z3 = 5;
Expand[
Solve[{{-i1 + 1/z4 1000 vA + 1/z3 (1000 vA - 1000 vB) == 0,
-1/z3 (1000 vA - 1000 vB) + 1/z5 1000 vB + i2 == 0, v1 == vA, v2 == vB}},
{vA, vB, i1, i2}]]
{{vA -> v1, vB -> v2, i1 -> 201 v1 - 200 v2, i2 -> 200 v1 - 201 v2}}
```

Valores estimados	v ₁ v ₂	76.42 kV 76.13 kV	Medidas estimadas	Precisión (%)	Errores			
					e	ε	ε _n	ε _n ²
Medidas	v' _A	76.22 kV	76.42 kV	1.00%	-0.2010	-0.0026	-0.2637	0.0695
	v' _B	75.91 kV	76.13 kV	1.00%	-0.2208	-0.0029	-0.2909	0.0846
	i' ₁	138.00 A	134.46 A	1.00%	3.5370	0.0256	2.5630	6.5692
	i' ₂	-18.15 A	-18.09 A	1.00%	-0.0612	0.0034	0.3372	0.1137
	v' ₁	76.20 kV	76.42 kV	0.50%	-0.2210	-0.0029	-0.5801	0.3365
	v' ₂	75.92 kV	76.13 kV	0.50%	-0.2108	-0.0028	-0.5553	0.3084
							f =	7.4819



En principio parece que $v_1 = 76.42$ kV y $v_2 = 76.13$ kV. Sin embargo, el valor de chi-cuadrado para $k = 6 - 2 = 4$ y 50% de tolerancia es $\chi^2 = 3.357$. Como f supera esa cifra, es probable que haya que descartar alguna lectura y los valores de la solución preliminares no pueden ser aceptados. Llama la atención el error del amperímetro que mide i'_1 . Descartando su medida obtenemos:

Valores estimados	v_1	v_2	Medidas estimadas	Precisión	Errores			
				(%)	e	ε	ε_n	ε_n^2
	76.21 kV	75.92 kV						
	v'_A	76.22 kV	76.21 kV	1.00%	0.0146	0.0002	0.0191	0.0004
	v'_B	75.91 kV	75.92 kV	1.00%	-0.0066	-0.0001	-0.0087	0.0001
Medidas	i'_1	138.00 A	133.97 A	1.00%	4.0280	0.0292		
	i'_2	-18.15 A	-18.15 A	1.00%	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	v'_1	76.20 kV	76.21 kV	0.50%	-0.0054	-0.0001	-0.0142	0.0002
	v'_2	75.92 kV	75.92 kV	0.50%	0.0034	0.0000	0.0090	0.0001
							$f =$	0.0007

Chi-cuadrado para $k = 5 - 2 = 3$ y 50% de probabilidad es ahora $\chi^2 = 2.366$. Como f es ya menor que esa cantidad se puede concluir que los valores *verdaderos* de las variables de estado son

$$v_1 = 76.21 \text{ kV} \quad \text{y} \quad v_2 = 75.92 \text{ kV}$$

Analizando lo ocurrido en la resolución de este ejercicio se observa lo siguiente:

Hay una ligera diferencia entre las lecturas v'_1 y v'_A , cuando era de esperar que ambos valores coincidieran por ser mediciones de la misma tensión. Pero se trata de datos provenientes de instrumentos distintos y esto es normal que ocurra. Lo mismo pasa con v'_2 y v'_B , por la misma razón.

A partir de las seis lecturas disponibles se estimaron $v_1 = 76.42$ kV y $v_2 = 76.13$ kV, pero la supervisión de errores condujo a descartar i'_1 . Se llega así a medidas más consistentes entre ellas, sin pérdida de información y logrando un resultado en términos de error total f muy bajo.

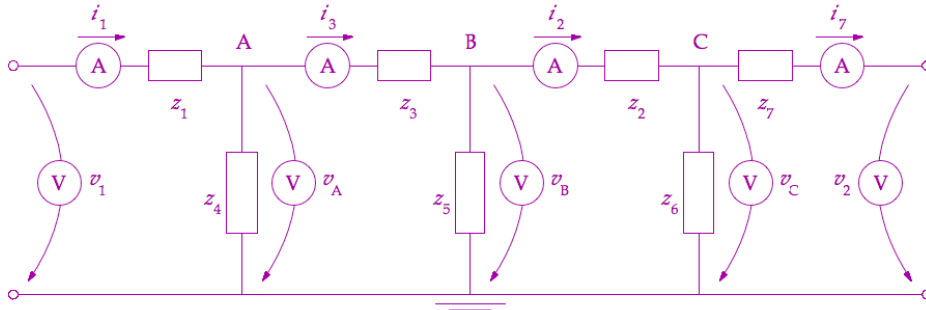
El análisis permite comunicar al departamento de mantenimiento que la lectura del amperímetro que mide i_1 debería estar en torno a 133.97 A y está midiendo 138.00 A. Es decir, el amperímetro mide con un error relativo en tantos por ciento que supera mucho su precisión y está probablemente averiado:

$$\varepsilon(\%) = \frac{i'_1 - i_1}{i_1} \times 100 = \frac{138.00 - 133.97}{133.97} \times 100 = 2.92\% (>> 1.0\%)$$

La eliminación de medidas atípicas como técnica de tratamiento de errores es adecuada en ingeniería eléctrica porque se cumplen las premisas de distribución normal de los errores y de gran perfección del modelo matemático para el cálculo de las variables de estado, dado por la Teoría de circuitos para estas redes de Kirchhoff.

6. Sea el cuadripolo de la figura. Obtenga las ecuaciones de las mediciones. Estime los valores de las variables de estado v_1 y v_2 a partir de los datos de la red y de las lecturas que se indican,

empleando la corrección por el método de los mínimos cuadrados aplicada a las mediciones, más la estimación probabilística de la presencia de medidas aberrantes (método chi-cuadrado con un grado de tolerancia de errores del 25%), y su oportuno tratamiento en caso de que las hubiera empleando para ello un criterio 1.2 sigma.



$z_1 = z_2 = z_3 = z_7 = 250 \Omega$ $v'_1 = 20.06 \text{ kV (0.5\%)}$ $i'_1 = 19.40 \text{ A (3.0\%)}$
 $z_4 = z_5 = z_6 = 200 \text{ k}\Omega$ $v'_2 = 0.68 \text{ kV (0.5\%)}$ $i'_2 = 19.27 \text{ A (3.0\%)}$
 $v'_A = 15.15 \text{ kV (1.0\%)}$ $i'_3 = 21.02 \text{ A (3.0\%)}$
 $v'_B = 10.62 \text{ kV (1.0\%)}$ $i'_7 = 19.24 \text{ A (3.0\%)}$
 $v'_C = 5.50 \text{ kV (1.0\%)}$

Solución:

Con Mathematica® se puede proceder así:

```

Ecuaciones de las mediciones;
Remove["Global`*"];
z1 = z2 = z3 = z7 = 250.;
z4 = z5 = z6 = 200 000;
Solve[{-i1 + 1000 vA/z4 + i3 == 0, 1000 (vB - vA)/z3 + 1000 vB/z5 + i2 == 0,
1000 (vC - vB)/z2 + 1000 vC/z6 + 1000 (vC - v2)/z7 == 0, 1000 v1 == z1 i1 + 1000 vA,
1000 (vA - vB) == z3 i3, 1000 (vB - vC) == z2 i2,
1000 v2 == -z7 i7 + 1000 vC}, {i1, i2, i3, i7, vA, vB, vC}]

{{i1 -> 0. + 1.00437 v1 - 0.996882 v2,
i2 -> 0. + 0.998129 v1 - 1.00062 v2, i3 -> 0. + 1.00062 v1 - 0.998129 v2,
i7 -> 0. + 0.996882 v1 - 1.00437 v2, vA -> 0. + 0.748908 v1 + 0.249221 v2,
vB -> 0. + 0.498753 v1 + 0.498753 v2, vC -> 0. + 0.249221 v1 + 0.748908 v2}}

```

Ordenando como es habitual las ecuaciones y las lecturas, con las precisiones de los aparatos, llegamos a la siguiente tabla que Excel optimiza para proporcionar una primera solución:

$v_1 = 20.14 \text{ kV}$ y $v_2 = 0.68 \text{ kV}$, con $f = 12.5170$

Valores estimados	v_1 v_2	20.14 kV 0.68 kV	Medidas estim.	Precisión		Errores			
				(%)	e	ϵ	ϵ_n	ϵ_n^2	
Medidas	i'_1	19.40 A	19.55 A	3.00%	-0.1463	-0.0075	-0.2513	0.0632	
	i'_2	19.27 A	19.42 A	3.00%	-0.1481	-0.0077	-0.2561	0.0656	
	i'_3	21.02 A	19.47 A	3.00%	1.5501	0.0737	2.4581	6.0424	
	i'_7	19.24 A	19.39 A	3.00%	-0.1504	-0.0078	-0.2606	0.0679	
	v'_A	15.15 kV	15.25 kV	1.00%	-0.0996	-0.0066	-0.6574	0.4322	
	v'_B	10.62 kV	10.38 kV	1.00%	0.2379	0.0224	2.2399	5.0173	
	v'_C	5.50 kV	5.53 kV	1.00%	-0.0276	-0.0050	-0.5020	0.2520	
	v'_1	20.06 kV	20.14 kV	0.50%	-0.0762	-0.0038	-0.7592	0.5765	
	v'_2	0.68 kV	0.68 kV	0.50%	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000	
							$f =$	12.5170	



Con 9 lecturas y 2 variables a estimar tenemos $k = 9 - 2 = 7$ grados de libertad y $\chi^2 = 4.255$ para una probabilidad de error del 25%. Claramente hay al menos una medida aberrante.

La media de los cuadrados de los errores relativos normalizados ε_n^2 es $\overline{\sigma_{\varepsilon_n^2}} = 1.3908$ y la desviación típica de esos errores es $\sigma_{\varepsilon_n^2} = 2.2329$. Una desviación de 1.2 sigma respecto de la media equivale a sospechar de aquellos valores que caigan fuera del siguiente intervalo:

$$0 \leq \text{errores razonables} \leq 1.3908 + 1.2 \times 2.2329$$

$$0 \leq \text{errores razonables} \leq 4.0702$$

El valor de i'_3 , cuyo error cuadrático es de 6.0424, destaca como valor atípico. Lo mismo ocurre con el valor de v'_B porque su error cuadrático es de 5.0173- El problema pide eliminarlos, ignorar las lecturas de i'_3 y de v'_B , que es lo que se hace ahora:

Valores estimados	v_1 v_2	20.04 kV 0.68 kV	Medidas estim.	Precisión (%)	Errores			
					e	ε	ε_n	ε_n^2
Medidas	i'_1	19.40 A	19.45 A	3.00%	-0.0518	-0.0027	-0.0890	0.0079
	i'_2	19.27 A	19.32 A	3.00%	-0.0542	-0.0028	-0.0937	0.0088
	i'_3	21.02 A	19.38 A	3.00%	1.6442	0.0782	2.6073	
	i'_7	19.24 A	19.30 A	3.00%	-0.0566	-0.0029	-0.0981	0.0096
	v'_A	15.15 kV	15.18 kV	1.00%	-0.0292	-0.0019	-0.1925	0.0370
	v'_B	10.62 kV	10.34 kV	1.00%	0.2848	0.0268	2.6817	
	v'_C	5.50 kV	5.50 kV	1.00%	-0.0042	-0.0008	-0.0757	0.0057
	v'_1	20.06 kV	20.04 kV	0.50%	0.0179	0.0009	0.1785	0.0318
	v'_2	0.68 kV	0.68 kV	0.50%	0.0000	0.0000	0.0029	0.0000
								$f =$

Como ahora f resulta de solo 0.1010, es ya claramente inferior a $\chi^2 = 2.675$ ($k = 6$, 25% probabilidad), por lo que no es probable que siga habiendo medidas aberrantes y las variables de estado se considera que valen $v_1 = 20.04$ kV y $v_2 = 0.68$ kV.